TD 00 : REVISIONS DE CALCUL ALGEBRIQUE

Fractions :

1./ Si b et b' ne sont pas nuls : $\begin{cases} \text{addition de 2 fractions : } \dfrac{a}{b}+\dfrac{a'}{b'}=\dfrac{ab'+a'b}{bb'} \\ \text{produit de 2 fractions : } \dfrac{a}{b}\times\dfrac{a'}{b'}=\dfrac{aa'}{bb'} \text{ et } a\times\dfrac{a'}{b'}=\dfrac{aa'}{b'} \end{cases}$

2./ Si b, c et d ne sont pas nuls : quotient de 2 fractions : $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{d}{c}$, $\dfrac{\frac{a}{b}}{c}=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{1}{c}$, $\dfrac{a}{\frac{b}{c}}=a\times\dfrac{c}{b}$

remarque : en pratique, écrire les fractions sous forme irréductible

Calcul littéral :

Distributivité : $a\times(b+c)=ab+ac$

Double distributivité : $(a+b)\times(c+d)=ac+ad+bc+bd$

Egalités remarquables : $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ et $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Puissances :

$\forall x\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{N}^*$, on note $x^n=\underbrace{x\times x\times\ldots\times x}_{n \text{ facteurs}}$ et $x^0=1$, si $x\neq 0$, $x^{-n}=\dfrac{1}{x^n}$

$\forall(x,y)\in(\mathbb{R}^*)^2, \forall(m,n)\in\mathbb{Z}^2, \begin{cases} x^m\times x^n=x^{m+n} \text{ et } \dfrac{x^m}{x^n}=x^{m-n} \\ x^m\times y^m=(x\times y)^m \\ (x^m)^n=x^{m\times n} \end{cases}$

Equations et inéquations du 1er degré :

1./ Soient a et b des réels, on distingue 3 cas pour résoudre l'équation $ax=b$ d'inconnue x :

i) si $a\neq 0$: $x=\dfrac{b}{a}$ est l'unique solution : $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{b}{a}\right\}$

ii) si $a=0$ et $b\neq 0$: l'équation n'a pas de solution : $\mathcal{S}=\varnothing$

iii) si $a=b=0$: tout réel est solution de l'équation : $\mathcal{S}=\mathbb{R}$

2./ Soient a et b deux réels, on distingue 3 cas pour résoudre l'inéquation $ax\leq b$ d'inconnue x :

i) si $a>0$: $ax\leq b \Leftrightarrow x\leq\dfrac{b}{a}$: $\mathcal{S}=\left]-\infty,\dfrac{b}{a}\right]$: division des 2 membres de l'inégalité par un réel strictement positif

ii) si $a<0$: $ax\leq b \Leftrightarrow x\geq\dfrac{b}{a}$: $\mathcal{S}=\left[\dfrac{b}{a},+\infty\right[$: division des 2 membres de l'inégalité par un réel strictement négatif

iii) si $a=0$: l'ensemble des solutions dépend du signe de b :

$a=0$ et $b\geq 0$: $\mathcal{S}=\mathbb{R}$: tous les réels vérifient l'inégalité $ax\leq b$

$a=0$ et $b<0$: $\mathcal{S}=\varnothing$: aucun réel vérifie l'inégalité $ax\leq b$

Equations du 2nd degré :

Soient a,b et c des réels avec $a \neq 0$, on associe à l'équation $(E): ax^2+bx+c=0$ le discriminant $\Delta = b^2-4ac$

i) si $\Delta > 0$: (E) admet 2 solutions réelles distinctes $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ est la forme factorisée du trinôme

ii) Si $\Delta = 0$: (E) admet une unique solution $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ et $ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$

iii) Si $\Delta < 0$: (E) n'a pas de solution réelle

Cas particuliers d'équations du 2nd degré :

Soit α un réel, on distingue 3 cas pour résoudre l'équation $x^2=\alpha$ d'inconnue x :

i) si $\alpha > 0$: $x^2 = \alpha \Leftrightarrow x = \sqrt{\alpha}$ ou $x = -\sqrt{\alpha}$: 2 solutions distinctes

ii) si $\alpha = 0$: $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$: 1 unique solution

iii) si $\alpha < 0$: l'équation $x^2=\alpha$ n'a pas de solution réelle

Inéquations du 2nd degré :

Soit a,b et c des réels avec $a \neq 0$, on distingue 2 cas pour déterminer le signe de ax^2+bx+c

i) si $\Delta > 0$, on suppose que $x_1 < x_2$:

le signe de ax^2+bx+c est celui de a pour $x \in \left]-\infty, x_1\right] \cup \left[x_2 +\infty\right[$

le signe de ax^2+bx+c est celui de $-a$ pour $x \in [x_1, x_2]$

ii) Si $\Delta \leq 0$, le signe de ax^2+bx+c est celui de a

Calcul de fractions, de puissances et de racines :

$\boxed{1}$ a) Simplifier $A = \dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ $\quad B = \dfrac{\frac{a}{b}}{c}$ $\quad C = \dfrac{a}{\frac{b}{c}}$

b) Simplifier les fractions suivantes : $A = \dfrac{\frac{3}{4}}{4}$ $\quad B = \dfrac{3}{\frac{3}{4}}$ $\quad C = \dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{3}}$ $\quad D = \dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{2}}$

c) Effectuer les calculs : $A = 3 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{5}$ $\quad B = \dfrac{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{6}}$

d) Donner chaque résultat sous la forme $2^a \times 3^b \times 5^c$: $A = \dfrac{2^3 \times 5^2}{6^2 \times 25^3}$ $\quad B = \dfrac{\left(2^3 \times 5\right)^2 \times 9}{10^2 \times 8}$

$\boxed{2}$ 1./ Ecrire les nombres suivants sous la forme $a + b\sqrt{n}$ où a et b sont des entiers relatifs et n un entier naturel

$A = \left(2-\sqrt{3}\right)^2$ $\qquad B = \left(2-\sqrt{7}\right)\left(2+\sqrt{7}\right)$

2./ Ecrire les réels suivants avec un dénominateur entier

$$A=\frac{2}{1-\sqrt{3}} \qquad B=\frac{\sqrt{3}-1}{3+\sqrt{2}} \qquad C=\frac{1}{1+\sqrt{2}}-\left(\sqrt{2}-1\right)$$

3./ a) Justifier que $4+2\sqrt{3}\geq 0$ et $4-2\sqrt{3}\geq 0$

b) On pose $A=\sqrt{4-2\sqrt{3}}-\sqrt{4+2\sqrt{3}}$, calculer A^2 et en déduire A

Factorisations :

$\boxed{\textbf{3}}$ 1./ Factoriser les expressions suivantes :

$$A=x^5-2x^3 \qquad B=1-10x^2+25x^4$$

$$C=16\left(2x+7\right)^2-25\left(1-x\right)^2 \qquad D=x^2-4x+4+\left(3x-6\right)\left(x+3\right)-5\left(x^2-4\right)$$

2./ Développer $\left(a-b\right)\left(a^2+ab+b^2\right)$ puis factoriser $27x^3+8$

Equations :

$\boxed{\textbf{4}}$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1./ $1-\frac{1-x}{2}=2+\frac{2-x}{3}$ 2./ $\frac{x-2}{x+2}-\frac{x+2}{x-2}=\frac{18}{x^2-4}$ 3./ $x^4-4x^2+3=0$

$\boxed{\textbf{5}}$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes en fonction de $m\in\mathbb{R}$:

1./ $2mx-3=x+5m$ 2./ $\left(2-x\right)^2=1-m$

Inéquations :

$\boxed{\textbf{6}}$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1./ $1-\left(2-x\right)\leq 3x+2\left(1-x\right)$ 2./ $\frac{2x-3}{x^2-4}\geq 1$ 2./ $\frac{x+3}{x-3}-\frac{x-3}{x+3}\leq\frac{36}{x^2-9}$

4./ $x^4+2x^2-3<0$

Compléments : Somme et produit des solutions d'une équation du second degré

1./ Soient a,b et c des réels avec $a \neq 0$, $\Delta = b^2 - 4ac$ est le discriminant associé à $(E): ax^2 + bx + c = 0$

On suppose que $\Delta > 0$ et donc (E) admet 2 solutions réelles distinctes $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

On note $S = x_1 + x_2$: la somme des solutions et $P = x_1 x_2$: le produit des solutions

Alors $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $P = x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$

2./ Réciproquement, soient α et β des réels dont la somme est égale à S et dont le produit est égal à P

Alors α et β sont les solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$

Applications :

a) Vérifier que -2 est une solution de l'équation $(E): 3x^2 + x - 10 = 0$ puis résoudre (E)

b) Déterminer une solution évidente de $(E): x^2 - 23x - 24 = 0$ puis résoudre (E)

c) Justifier que $(E): 2x^2 + 10x - 5 = 0$ admet des solutions réelles distinctes

Sans résoudre (E), déterminer le signe de ces solutions

d) Justifier que $(E): x^2 - 7x + 5 = 0$ admet des solutions réelles distinctes

Sans résoudre (E), déterminer le signe de ces solutions

e) Déterminer tous les couples de réels dont la somme est égale à 5 et dont le produit est égal à -14

Correction

a) $x_1 = -2$ est une solution de l'équation $(E): 3x^2 + x - 10 = 0$ car $3\times(-2)^2 + (-2) - 10 = 12 - 2 - 10 = 0$

Soit x_2 la 2ème solution de (E), alors $P = x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \Leftrightarrow -2x_2 = -\dfrac{10}{3} \Leftrightarrow x_2 = \dfrac{10}{6}$

remarque : $S = x_1 + x_2 = -2 + \dfrac{10}{6} = -\dfrac{2}{6} = -\dfrac{1}{3}$ et $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{1}{3}$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{-2, \frac{10}{6}\right\}}$$

b) $x_1 = -1$ est une solution de l'équation $(E): x^2 - 23x - 24 = 0$ car $(-1)^2 - 23\times(-1) - 24 = 1 + 23 - 24 = 0$

Soit x_2 la 2ème solution de (E), alors $P = x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \Leftrightarrow -x_2 = -24 \Leftrightarrow x_2 = 24$

remarque : $S = x_1 + x_2 = -1 + 24 = 23$ et $-\dfrac{b}{a} = 23$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{-1, 24\}}$$

c) $\Delta = 10^2 - 4\times 2\times(-5) = 100 + 40 = 140 > 0$ donc $(E): 2x^2 + 10x - 5 = 0$ admet des solutions réelles distinctes

Soient x_1 et x_2 les solutions de (E), alors $P = x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} = -\dfrac{5}{2} < 0$ donc x_1 et x_2 ont des signes opposés

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E): 2x^2 + 10x - 5 = 0 \text{ ont des signes opposés}}$$

d) $\Delta=(-7)^2-4\times1\times5=49-20=29>0$ donc $(E): x^2-7x+5=0$ admet des solutions réelles distinctes

Soient x_1 et x_2 les solutions de (E), alors $P=x_1x_2=\frac{c}{a}=5>0$ donc x_1 et x_2 ont le même signe.

De plus, $S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}=7>0$ donc $x_1>0$ et $x_2>0$

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E): x^2-7x+5=0 \text{ sont strictement positives}}$$

e) Soient α et β des réels dont la somme est $S=5$ et dont le produit est $P=-14$

On résout le système : $\begin{cases}\alpha+\beta=5\\ \alpha\beta=-14\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta=5-\alpha\\ \alpha(5-\alpha)=-14\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta=5-\alpha\\ -\alpha^2+5\alpha+14=0\end{cases}$

α est solution de l'équation $-x^2+5x+14=0 \Leftrightarrow x^2-5x-14=0$

<u>*remarque :*</u> on retrouve bien la forme générale de l'équation qui est $x^2-Sx+P=0$

On résout l'équation : $x^2-5x-14=0$: $\Delta=(-5)^2-4\times1\times(-14)=25+56=81>0$

Les solutions de l'équation $x^2-5x-14=0$ sont $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5+9}{2}=7$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5-9}{2}=-2$

Si $\alpha=7$ alors $\beta=5-\alpha=-2$, si $\alpha=-2$ alors $\beta=5-\alpha=7$

Réciproquement, les couples de réels $(7,-2)$ et $(-2,7)$ conviennent car $\begin{cases}7+(-2)=(-2)+7=5\\ 7\times(-2)=(-2)\times7=-14\end{cases}$

$$\boxed{\text{Les couples de réels dont la somme est égale à 5 et dont le produit est égal à } -14 \text{ sont } (7,-2) \text{ et } (-2,7)}$$