

TD 00 : REVISIONS DE CALCUL ALGEBRIQUE

Fractions :

1./ Si b et b' sont des réels non nuls :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{addition de 2 fractions : } \frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{ab' + a'b}{bb'} \\ \text{produit de 2 fractions : } \frac{a}{b} \times \frac{a'}{b'} = \frac{aa'}{bb'} \text{ et } a \times \frac{a'}{b'} = \frac{aa'}{b'} \end{array} \right.$$

2./ Si b, c et d sont des réels non nuls : quotient de 2 fractions :

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}, \quad \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}} = \frac{a}{c} \times \frac{d}{b}, \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = a \times \frac{d}{bc}$$

remarque : en pratique, écrire les fractions sous forme irréductible

Calcul littéral :

Distributivité : $a \times (b + c) = ab + ac$

Double distributivité : $(a + b) \times (c + d) = ac + ad + bc + bd$

Egalités remarquables : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ et $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Puissances :

Pour tout réel x et tout entier naturel non nul n : on note $x^n = \underbrace{x \times x \times \dots \times x}_{n \text{ facteurs}}$ et $x^0 = 1$, si $x \neq 0$, $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

Pour tous réels non nuls x et y et tous entiers relatifs m et n :

$$\left\{ \begin{array}{l} x^m \times x^n = x^{m+n} \text{ et } \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \\ x^m \times y^m = (x \times y)^m \\ (x^m)^n = x^{m \times n} \end{array} \right.$$

Equations et inéquations du 1^{er} degré :

1./ Soient a et b des réels, on distingue 3 cas pour résoudre l'équation $ax = b$ d'inconnue x :

i) si $a \neq 0$: $x = \frac{b}{a}$ est l'unique solution : $\mathcal{S} = \left\{ \frac{b}{a} \right\}$

ii) si $a = 0$ et $b \neq 0$: l'équation n'a pas de solution : $\mathcal{S} = \{\emptyset\}$

iii) si $a = b = 0$: tout réel est solution de l'équation : $\mathcal{S} = \mathbb{R}$

2./ Soient a et b deux réels, on distingue 3 cas pour résoudre l'inéquation $ax \leq b$ d'inconnue x :

i) si $a > 0$: $ax \leq b \Leftrightarrow x \leq \frac{b}{a}$: $\mathcal{S} = \left] -\infty, \frac{b}{a} \right]$: division des 2 membres de l'inégalité par un réel strictement positif

ii) si $a < 0$: $ax \leq b \Leftrightarrow x \geq \frac{b}{a}$: $\mathcal{S} = \left[\frac{b}{a}, +\infty \right[$: division des 2 membres de l'inégalité par un réel strictement négatif

iii) si $a = 0$: l'ensemble des solutions dépend du signe de b :

si $a = 0$ et $b \geq 0$: tous les réels vérifient l'inégalité $ax \leq b$ donc $\mathcal{S} = \mathbb{R}$

si $a = 0$ et $b < 0$: aucun réel vérifie l'inégalité $ax \leq b$ donc $\mathcal{S} = \{\emptyset\}$

Equations du 2nd degré :

Soient a, b et c des réels avec $a \neq 0$, on associe à l'équation $(E): ax^2 + bx + c = 0$ le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

i) si $\Delta > 0$: (E) admet 2 solutions réelles distinctes $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ est la forme factorisée du trinôme

ii) Si $\Delta = 0$: (E) admet une unique solution $x_0 = -\frac{b}{2a}$ et $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$

iii) Si $\Delta < 0$: (E) n'a pas de solution réelle

Cas particuliers d'équations du 2nd degré :

Soit α un réel, on distingue 3 cas pour résoudre l'équation $x^2 = \alpha$ d'inconnue x :

i) si $\alpha > 0$: $x^2 = \alpha \Leftrightarrow x = \sqrt{\alpha}$ ou $x = -\sqrt{\alpha}$: 2 solutions distinctes

ii) si $\alpha = 0$: $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$: 1 unique solution

iii) si $\alpha < 0$: l'équation $x^2 = \alpha$ n'a pas de solution réelle

Inéquations du 2nd degré :

Soient a, b et c des réels avec $a \neq 0$, on distingue 2 cas pour déterminer le signe de $ax^2 + bx + c$

i) si $\Delta > 0$, on suppose que $x_1 < x_2$:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$		
$ax^2 + bx + c$	signe de a		0	signe de $-a$	0	signe de a

le signe de $ax^2 + bx + c$ est celui de a pour $x \in]-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty[$

le signe de $ax^2 + bx + c$ est celui de $-a$ pour $x \in [x_1, x_2]$

ii) Si $\Delta \leq 0$, le signe de $ax^2 + bx + c$ est celui de a pour tout réel x

Calcul de fractions, de puissances et de racines :

1 a) Simplifier $A = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ $B = \frac{\frac{a}{b}}{c}$ $C = \frac{a}{\frac{b}{c}}$

b) Effectuer : $A = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{4}{4}}$ $B = \frac{\frac{3}{3}}{\frac{4}{4}}$ $C = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{3}}$ $D = \frac{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{6}}$

c) Ecrire $A = \frac{(2^3 \times 5)^2 \times 9}{10^2 \times 8}$ sous la forme $2^a \times 3^b \times 5^c$

2 1./ Ecrire les nombres suivants sous la forme $a + b\sqrt{n}$ où a et b sont des entiers relatifs et n un entier naturel

$$A = (2 - \sqrt{3})^2$$

$$B = (2 - \sqrt{7})(2 + \sqrt{7})$$

2./ Ecrire les réels suivants avec un dénominateur entier : $A = \frac{2}{1-\sqrt{3}}$

$$B = \frac{\sqrt{3}-1}{3+\sqrt{2}}$$

3./ a) Justifier que $4+2\sqrt{3} \geq 0$ et $4-2\sqrt{3} \geq 0$

b) On pose $A = \sqrt{4-2\sqrt{3}} - \sqrt{4+2\sqrt{3}}$, calculer A^2 et en déduire A

Factorisations :

3 1./ Factoriser les expressions suivantes :

$$A = 1 - 10x^2 + 25x^4$$

$$B = 16(2x+7)^2 - 25(1-x)^2$$

$$C = x^2 - 4x + 4 + (3x-6)(x+3) - 5(x^2-4)$$

2./ Développer $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ puis factoriser $27x^3+8$

Equations :

4 Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

$$1./ 1 - \frac{1-x}{2} = 2 + \frac{2-x}{3}$$

$$2./ \frac{x-2}{x+2} - \frac{x+2}{x-2} = \frac{18}{x^2-4}$$

$$3./ x^4 - 4x^2 + 3 = 0$$

5 Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes en fonction de $m \in \mathbb{R}$:

$$1./ 2mx - 3 = x + 5m$$

$$2./ (2-x)^2 = 1-m$$

Inéquations :

6 Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

$$1./ 1 - (2-x) \leq 3x + 2(1-x)$$

$$2./ \frac{2x-3}{x^2-4} \geq 1$$

$$3./ \frac{x+3}{x-3} - \frac{x-3}{x+3} \leq \frac{36}{x^2-9}$$

Compléments : Somme et produit des solutions d'une équation du second degré

1./ Soient a, b et c des réels avec $a \neq 0$, $\Delta = b^2 - 4ac$ est le discriminant associé à $(E): ax^2 + bx + c = 0$

On suppose que $\Delta > 0$ et donc (E) admet 2 solutions réelles distinctes $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

On note $S = x_1 + x_2$: la somme des solutions et $P = x_1 x_2$: le produit des solutions

Alors $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

2./ Réciproquement, soient α et β des réels dont la somme est égale à S et dont le produit est égal à P

Alors α et β sont les solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$

Applications :

a) Vérifier que -2 est une solution de l'équation $(E): 3x^2 + x - 10 = 0$ puis résoudre (E)

b) Déterminer une solution évidente de $(E): x^2 - 23x - 24 = 0$ puis résoudre (E)

c) Justifier que $(E): 2x^2 + 10x - 5 = 0$ admet des solutions réelles distinctes

Sans résoudre (E) , déterminer le signe de ces solutions

d) Justifier que $(E): x^2 - 7x + 5 = 0$ admet des solutions réelles distinctes

Sans résoudre (E) , déterminer le signe de ces solutions

e) Déterminer tous les couples de réels dont la somme est égale à 5 et dont le produit est égal à -14

Correction

a) $x_1 = -2$ est une solution de l'équation $(E): 3x^2 + x - 10 = 0$ car $3 \times (-2)^2 + (-2) - 10 = 12 - 2 - 10 = 0$

Soit x_2 la 2^{ème} solution de (E) , alors $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \Leftrightarrow -2x_2 = -\frac{10}{3} \Leftrightarrow x_2 = \frac{10}{6}$

remarque : $S = x_1 + x_2 = -2 + \frac{10}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$ et $-\frac{b}{a} = -\frac{1}{3}$

$$\mathcal{S} = \left\{ -2, \frac{10}{6} \right\}$$

b) $x_1 = -1$ est une solution de l'équation $(E): x^2 - 23x - 24 = 0$ car $(-1)^2 - 23 \times (-1) - 24 = 1 + 23 - 24 = 0$

Soit x_2 la 2^{ème} solution de (E) , alors $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \Leftrightarrow -x_2 = -24 \Leftrightarrow x_2 = 24$

remarque : $S = x_1 + x_2 = -1 + 24 = 23$ et $-\frac{b}{a} = 23$

$$\mathcal{S} = \{-1, 24\}$$

c) $\Delta = 10^2 - 4 \times 2 \times (-5) = 100 + 40 = 140 > 0$ donc $(E): 2x^2 + 10x - 5 = 0$ admet des solutions réelles distinctes

Soient x_1 et x_2 les solutions de (E) , alors $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{5}{2} < 0$ donc x_1 et x_2 ont des signes opposés

Les solutions de $(E): 2x^2 + 10x - 5 = 0$ ont des signes opposés

d) $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 49 - 20 = 29 > 0$ donc $(E): x^2 - 7x + 5 = 0$ admet des solutions réelles distinctes

Soient x_1 et x_2 les solutions de (E) , alors $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 5 > 0$ donc x_1 et x_2 ont le même signe.

De plus, $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 7 > 0$ donc $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$

Les solutions de $(E): x^2 - 7x + 5 = 0$ sont strictement positives

e) Soient α et β des réels dont la somme est $S = 5$ et dont le produit est $P = -14$

On résout le système :
$$\begin{cases} \alpha + \beta = 5 \\ \alpha\beta = -14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 5 - \alpha \\ \alpha(5 - \alpha) = -14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 5 - \alpha \\ -\alpha^2 + 5\alpha + 14 = 0 \end{cases}$$

α est solution de l'équation $-\alpha^2 + 5\alpha + 14 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 5\alpha - 14 = 0$

remarque : on retrouve bien la forme générale de l'équation qui est $x^2 - Sx + P = 0$

On résout l'équation : $x^2 - 5x - 14 = 0$: $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times (-14) = 25 + 56 = 81 > 0$

Les solutions de l'équation $x^2 - 5x - 14 = 0$ sont $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + 9}{2} = 7$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 - 9}{2} = -2$

Si $\alpha = 7$ alors $\beta = 5 - \alpha = -2$, si $\alpha = -2$ alors $\beta = 5 - \alpha = 7$

Réciproquement, les couples de réels $(7, -2)$ et $(-2, 7)$ conviennent car
$$\begin{cases} 7 + (-2) = (-2) + 7 = 5 \\ 7 \times (-2) = (-2) \times 7 = -14 \end{cases}$$

Les couples de réels dont la somme est égale à 5 et dont le produit est égal à -14 sont $(7, -2)$ et $(-2, 7)$