POUR SE PREPARER A LA PHYSIQUE EN ATS

Table des matières

CHAPITRE MES.1. : UNITES, CONVERSIONS, PUISSANCES DE 10

▪ Rappels de cours

1. MULTIPLES ET SOUS-MULTIPLES DU SYSTEME INTERNATIONAL

Nom	Symbole	Facteur
yotta	Y	10^{24}
zetta	Z	10^{21}
exa	E	10^{18}
peta	P	10^{15}
tera	T	10^{12}
giga	G	10^{9}
méga	M	10^{6}
kilo	k	10^{3}
hecto	h	10^{2}
déca	da	10

Nom	Symbole	Facteur
déci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
milli	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}
femto	f	10^{-15}
atto	a	10^{-18}
zepto	z	10^{-21}
yocto	y	10^{-24}

2. SYSTEME INTERNATIONAL D'UNITES (SI OU "MKSA")

a. Principales unités S.I. fondamentales

Grandeur	Longueur	Masse	Temps	Intensité électrique	Température
Unité	mètre	kilogramme	seconde	ampère	kelvin
Symbole de l'unité	**m**	**kg**	**s**	**A**	**K**

Attention !! Les multiples et sous multiples d'une unité S.I. ne sont pas des unités S.I. !

- masse : **kilogramme**, et non gramme !!
- temps : **seconde** et non heure ! **1 h = 3 600 s**
- volume : **mètre-cube**, et non litre **1 L = 1 dm³ ; 1 mL = 1 cm³**
- concentration : **mol.m⁻³** et non mol.L⁻¹.

b. Surfaces et volumes

Grandeur	Expression en unités de base SI
Surface (U.S.I. : m^2)	$1\ m^2 = 10^2\ dm^2 = 10^4\ cm^2$
Volume (U.S.I. : m^3)	$1\ m^3 = 10^3\ dm^3 = 10^6\ cm^3 = 10^9\ mm^3$

c. Quelques aires et volumes classiques

Disque (de rayon R)	Aire : $S = \pi R^2$	
Sphère (de rayon R)	Aire : $S = 4\pi R^2$	Volume : $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Cylindre (de hauteur h, de rayon à la base R)	Surface latérale : $S = 2\pi Rh$ Volume : $V = \pi R^2 h$

▪ Exercices MES.1

Exercice 1. MES1 : Exemples de conversions usuelles

Exprimer les grandeurs suivantes dans l'unité indiquée : a) $S = 5\ \mathrm{cm}^2$ en m^2, b) $V = 1\ \mathrm{\mu m}^3$ en m^3, c) $V' = 0{,}02\ \mathrm{m}^3$ en L, d) $c = 0{,}1\ \mathrm{mol.L}^{-1}$ en $\mathrm{mol.m}^{-3}$ e) $c' = 20\ \mathrm{mol.m}^{-3}$ en $\mathrm{mol.L}^{-1}$, f) $v = 120\ \mathrm{km.h}^{-1}$ en $\mathrm{m.s}^{-1}$, g) $v' = 20\ \mathrm{m.s}^{-1}$ en $\mathrm{km.h}^{-1}$, h) $\rho = 1{,}02.10^{-3}$ kg.L^{-1} en kg.m^{-3}
i) $\rho' = 13{,}6$ g.mL^{-1} en kg.m^{-3}

Exercice 2. MES1 : Calculer avec des puissances de 10

Attention ! exercice à faire sans calculatrice, en arrondissant de manière à conserver un ou deux chiffres significatifs. Il n'y a pas une unique démarche possible, il est demandé de trouver le bon ordre de grandeur, et idéalement le bon résultat avec un unique chiffre significatif.

1) a) Estimer le nombre de moles d'air dans une salle de classe de dimensions $12\ m \times 6\ m \times 3\ m$.

On assimile pour cela l'air à un gaz parfait ; le nombre de moles d'air est alors obtenu grâce à l'équation d'état des gaz parfaits : $n = \frac{pV}{RT}$ avec $R = 8{,}314\ \mathrm{J.mol^{-1}.K^{-1}}$ constante des gaz parfaits, T température telle que $T = 293\ K$, p pression telle que $p = 10^5\ Pa$, et V volume à exprimer en U.S.I. (m^3).

On propose : $n \approx 10^{-1}\ mol$ $n \approx 10^2\ mol$ $n \approx 10^4\ mol$ $n \approx 10^7\ mol$

b) Calculer la masse m d'air correspondante à l'aide de la masse molaire de l'air telle que $m = nM_{air}$. Pour obtenir une masse en kg, il faut exprimer la masse molaire en kg/mol.

c) Calculer ensuite le nombre N de molécules d'air tel que $N = nN_A$ où N_A est la constante d'Avogadro : $N_A = 6{,}02.10^{23}$ mol^{-1}

2) La charge de micro gouttelettes chargées électriquement peut être déterminée dans certaines conditions par l'expression suivante :

$$|q| = \frac{\rho_{eau}\frac{4}{3}\pi r^3 g d}{E}$$

avec $\rho_{eau} = 10^3\ \mathrm{kg.m^{-3}}, r = 5{,}4\ \mathrm{\mu m}, g \approx 10\ \mathrm{m.s^{-2}}, d = 10\ \mathrm{cm}$ et Faire l'application numérique après avoir converti les distances en mètres et le champ E en volt /mètre.

Exercice 3. MES1 : Applications numériques autour de l'énergie cinétique

L'énergie cinétique Ec d'un point matériel de masse m et de vitesse v est $Ec = \frac{1}{2}mv^2$.

1) Calculer l'énergie cinétique d'une automobile de $1{,}00\ tonne$ se déplaçant à une vitesse de $100\ km.h^{-1}$

2) Même question pour un boulon de $200\ g$ qui se détache d'un satellite géostationnaire se déplaçant à la vitesse de $3{,}10\ km.s^{-1}$. Commenter.

Exercice 4. MES1. : Champ gravitationnel de la comète

La masse volumique $\mu_{com} = 400\ \mathrm{kg}.m^{-3}$et la masse $m_{com} = 1{,}0.10^{13}\ \mathrm{kg}$ de la comète nous donnent accès à son volume :

$$V_{com} = \frac{m_{com}}{\mu_{com}} \text{ avec } V_{com} = \frac{4}{3}\pi\, {r_{com}}^3$$

Calculer le rayon r_{com} de la comète.

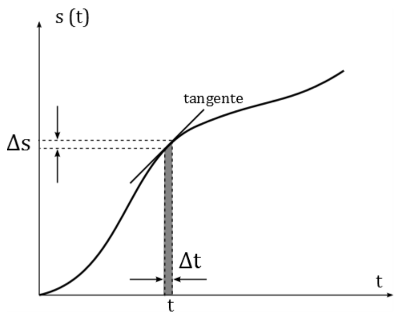
Donnée : $\left(\frac{1}{16}.10^{11}\right)^{1/3} \approx 1800$

MK1. Vitesse et acceleration pour des mouvements rectilignes – Deriver et integrer par rapport au temps

▪ Rappels de cours

1. Vitesse instantanee dans le cas general

On appelle $s(t)$ la distance parcourue à l'instant t. Pour définir la vitesse à chaque instant du mouvement, ou vitesse instantanée, on réduit l'intervalle de temps sur lequel on calcule la vitesse moyenne :



$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{\boldsymbol{s}}$$

En physique, le point désigne toujours une dérivation par rapport au temps

- **Vitesse scalaire instantanée (ou vitesse scalaire)**

$$\boldsymbol{v(t) = \dot{s} = \frac{ds}{dt}}$$

où $\mathrm{d}t$ **est le temps nécessaire pour parcourir la distance** $\mathrm{d}s$**. La vitesse est donc la** dérivée par rapport au temps de la fonction s (la notation $\frac{ds}{dt} = \dot{\boldsymbol{s}}$ est plus explicite que $\boldsymbol{s}'$)

- **Interprétation graphique :** $v(t)$ correspond à la pente de la tangente à la date t à la courbe $s(t)$.

- ***Remarque :*** la notation $v(t)$ signifie que v, la vitesse instantanée, est envisagée comme une fonction de t, le temps.

2. Cas du Mouvement rectiligne

- **Mouvement rectiligne** (MR) : trajectoire = **droite** pouvant être choisie comme axe Ox (axe du mouvement $x'x$ d'origine O), y et z étant alors toujours nuls.
- Le mouvement rectiligne est repéré par l'évolution de $x(t)$, **abscisse algébrique** (x pouvant être positive ou négative). Le déplacement du point matériel peut se faire suivant les x croissants ou décroissants.

- **Vitesse instantanée algébrique** v_x du point en mouvement rectiligne (MR)

La vitesse instantanée correspond à la **dérivée par rapport au temps de la position** :

$$\boldsymbol{v_x(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x}}$$

La position est l'**intégrale par rapport au temps de la vitesse :**

$$\boldsymbol{x(t) = \int v_x(t).dt + K} \qquad \textbf{ou} \qquad \boldsymbol{x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(t).dt}$$

- **Signe de $\boldsymbol{v_x}$: $\boldsymbol{v_x} > 0$** (positive) si le point $\boldsymbol{M}$ se déplace dans le sens des $\boldsymbol{x}$ croissants, négative sinon**.**

- ***Remarque :*** On note souvent la vitesse algébrique v_x ou $\dot{x}$ plutôt que v pour rappeler qu'elle peut être positive ou négative, v pouvant alors représenter la vitesse en valeur absolue, celle qui serait lue sur un tachymètre : $\boldsymbol{v = |v_x|}$.

- **Accélération instantanée algébrique** d'un point en mouvement rectiligne

Pour un mouvement rectiligne, l'accélération instantanée correspond à la **dérivée par rapport au temps de la vitesse :**

$$\boldsymbol{a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}}$$

Pour un mouvement rectiligne, la vitesse instantanée est alors l'**intégrale par rapport au temps de l'accélération :**

$$\boldsymbol{v_x(t) = \int a_x(t).dt + K}$$

$$\boldsymbol{v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^{t} a(t).dt}$$

- a_x peut être positive ou négative : $a_x > 0 \Leftrightarrow$ la vitesse scalaire v_x **augmente ;**

  $a_x > 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{v_x}$ **diminue**

Dérivation par rapport au temps →

Abscisse $x(t)$	Vitesse $v(t)$	Accélération $a(t)$

← **Intégration par rapport au temps**

Mouvement rectiligne

■ Exercices MK1

Exercice 5. Vitesse et position (1) : mouvement rectiligne uniforme

Un mouvement rectiligne uniforme **(**MRU) est un mouvement rectiligne à vitesse constante.

On a donc pour un mouvement selon l'axe (Ox) :

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = v(t) = \dot{x}_0 = v_0 = \text{cte}$$

Etablir l'expression de la position et de l'accélération pour tout instant $t \geq 0$, en considérant la position initiale suivante : $x(t=0) \underbrace{=}_{C.I.} x_0$. Tracer l'allure des courbes associées.

Exercice 6. Vitesse et position (2) : mouvement rectiligne uniformément accéléré

Un mouvement rectiligne uniformément accéléré **(**MRUA) est un mouvement rectiligne à accélération constante. On a donc pour un mouvement selon l'axe (Ox) :

$$\forall t \geq 0, \quad a_0 = \ddot{x}(t) = \frac{dv}{dt} = \text{cte}$$

Etablir l'expression de la vitesse et de la position pour tout instant $t \geq 0$, en considérant les conditions initiales suivantes : $x(t=0) \underbrace{=}_{C.I.} x_0$ et $v(t=0) \underbrace{=}_{C.I.} \boldsymbol{v_0}$**.** Tracer l'allure des courbes associées

---

Exercice 7. Un arbre sur la route

Un conducteur se trouve au volant de son véhicule assimilé à un point matériel M, et roule à la vitesse réglementaire $V_1 =$ 80 km.h^{-1} sur une portion de route horizontale et rectiligne lorsqu'il voit un arbre abattu sur la chaussée situé à une distance de $D =$ 50 m.

Un peu somnolent, il a un temps de réaction $\tau_r =$ 2 secondes, et freine alors.

1. On choisit comme instant initial $t = 0$ l'instant où le conducteur voit l'arbre.

   On repère la position de la voiture grâce à la variable $x(t)$ et on suppose que l'origine de ce repère spatial se trouve au point où se situe la voiture à l'instant initial ; on a donc $x(t=0) = 0$.

   Etablir l'expression de la distance D_r qu'il parcourt avant de commencer à freiner et effectuer l'application numérique.
2. On choisit comme nouvel instant initial le moment où le conducteur se met à freiner. On considère qu'il freine selon une accélération constante $a_2 = -5$ m.s^{-2}. Etablir l'expression de la vitesse $v(t)$ de la vitesse pendant la phase de freinage.
3. Etablir l'équation horaire $x(t)$ de la position de la voiture lors de la phase de freinage.
4. Etablir l'expression littérale (sans A.N.) du temps nécessaire à la voiture pour s'arrêter.
5. Déterminer si la voiture arrive à s'arrêter à temps pour éviter l'arbre.

MK2 : Positions d'equilibre a partir de l'energie potentielle : derivee premiere nulle, signe de la derivee seconde

▪ Rappels de cours

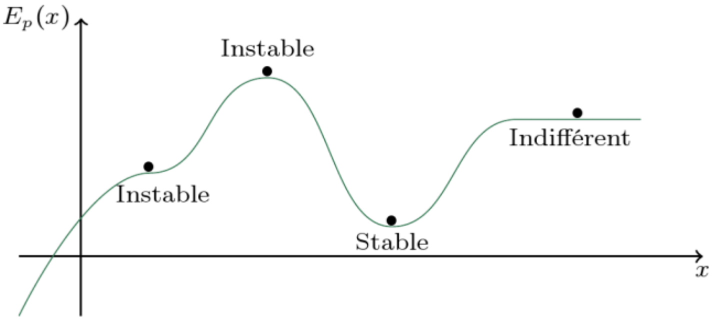
• Lien entre positions d'équilibre et énergie potentielle

Pour un point matériel repéré par un paramètre x unique,

- Position d'**équilibre** : correspond à un **extremum de l'énergie potentielle** soit $\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x_{éq}} = 0$
- Position d'**équilibre stable** : **minimum de l'énergie potentielle** soit $\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x_{éq}} > 0$

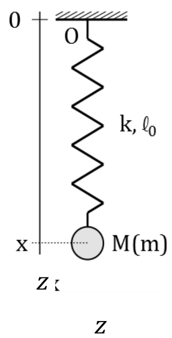
- Position d'**équilibre instable : maximum de l'énergie potentielle** soit $\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x_{éq}} < 0$

Graphiquement : Les positions d'équilibre sont associées localement à des puits ou des barrières de potentiel



▪ Exercices MK2

Exercice 8. Position d'équilibre d'un ressort vertical



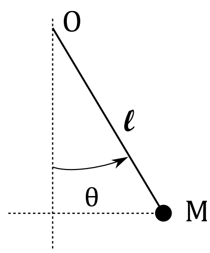
On considère un ressort de masse négligeable, de raideur k et de longueur au repos l_0, accroché à un point fixe O. Ce ressort pend verticalement et on fixe sur son extrémité libre une bille M de masse m. On note Oz l'axe vertical descendant, la position de la bille est donc repérée par z. L'accélération de la pesanteur est notée g.

L'énergie potentielle de ce ressort vertical repéré par l'axe (Oz) descendant (dirigé vers le bas), avec O point d'accroche du ressort, s'écrit :

$$E_p = E_{p\,pes} + E_{p\,él} = -mgz + \frac{1}{2}k(z - l_0)^2$$

Déterminer par le calcul la position d'équilibre z_0 du point matériel en fonction de l_0, k, m et g. Analyser sa stabilité.

Exercice 9. Energie potentielle du pendule simple IMPORTANT IMPORTANT 1| 2



Une bille assimilable à un point matériel M de masse m est suspendue à une tige de longueur L et de masse négligeable, reliée à un point fixe O. La tige tourne librement autour d'un axe horizontal passant par O. La position du pendule est repérée par l'angle θ que fait la tige avec la verticale descendante.

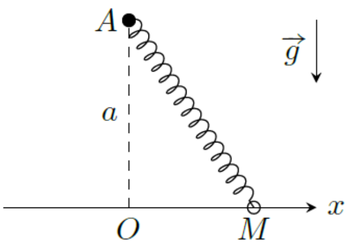
On donne l'expression de l'énergie potentielle du point M en fonction notamment de θ, angle du fil avec la verticale à un instant t donné : $\boldsymbol{E_p = -mg\ell\cos\theta}$

Etablir l'expression des positions d'équilibre et discuter de leur stabilité.

Exercice 10. Equilibre le long d'une tige –bifurcation mécanique (oscillateur de Landau)

L'oscillateur de Landau est un modèle théorique permettant de modéliser efficacement des systèmes physiques pour lesquelles des faibles non-linéarités sont à prendre en compte. Il s'agit d'une approximation un peu plus précise que celle de l'oscillateur harmonique pour étudier le comportement de systèmes au voisinage de leur position d'équilibre.

Un exemple de système modèle permettant de réaliser un oscillateur de Landau est un petit anneau, assimilé à un point matériel M de masse m, astreint à se déplacer sans frottement le long d'une tige rectiligne horizontale choisie comme axe (Ox). M est accroché à un ressort de longueur à vide L_0 et de raideur k.



L'autre extrémité A du ressort est fixe et se situe à la distance a du point O.

L'objet de ce problème est de déterminer une bifurcation, à savoir une modification du nombre de positions d'équilibre, d'un changement de stabilité des positions d'équilibre…

L'énergie potentielle globale est l'énergie potentielle élastique et a l'expression suivante :

$$Ep(x) = \frac{1}{2}\, k(L - L_0)^2 + cte = \frac{1}{2}\, k(\sqrt{x^2 + a^2} - L_0)^2 + cte.$$

Déterminer par le calcul les positions d'équilibre dans les 2 cas $a > L_0$ puis $a < L_0$ et discuter de leur stabilité.

MK3 PARTIE 1 : CONSERVATION DE L'ENERGIE MECANIQUE – EQUATION DIFFERENTIELLE DU MOUVEMENT : DERIVEE DE FONCTIONS COMPOSEES

▪ Rappels de cours

▪ **Théorème de la puissance mécanique pour un point M étudié dans un référentiel galiléen correspondant à un système conservatif d'énergie mécanique E_m constante :**

$$\frac{dE_m}{dt} = 0$$

- **Equation différentielle du mouvement** ou équation du mouvement : équation différentielle impliquant la dérivée seconde de la position, soit l'accélération, en faisant le lien entre les causes du mouvement (les interactions) et leur conséquence (le mouvement du système étudié).

Il existe différentes méthodes pour l'obtenir, la première que nous allons utiliser consiste pour les **systèmes conservatifs** à exploiter la conservation de l'énergie mécanique sous la forme $\frac{\boldsymbol{dEm}}{\boldsymbol{dt}} = 0$.

Dans l'étude des positions d'équilibre de systèmes conservatifs à un degré de liberté, il faut utiliser les **dérivées** de **l'énergie potentielle** par rapport à la **variable de position**, tandis que dans l'exploitation de la conservation de l'énergie mécanique il s'agit d'une dérivée par rapport **au temps.**

▪ Exercices MK3

Exercice 11. Chute d'une pomme de pin

Une pomme de pin se détache d'une branche à $10\ m$ du sol, à un instant choisi pour origine des dates.

On note Oz l'axe vertical ascendant, en prenant l'origine O au sol et $z(t=0)=h=10\ m$ l'altitude initiale de la pomme de pin ; $g \approx\ 10\ m.s^{-2}$ est l'accélération de la pesanteur.

On montre que son énergie mécanique E_m est :

$$E_m = E_c + E_p = ½\, m\dot{z}^2 + mgz = cte$$

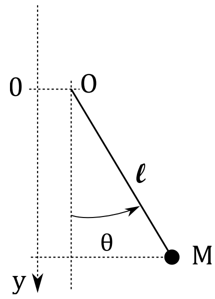
a) À l'aide du théorème de la puissance mécanique, établir l'expression de son accélération en cours de chute.

b) Voir MK1. : Intégrer l'expression de l'accélération par rapport au temps pour obtenir les expressions littérales de la vitesse et de la position de la pomme de pin.

a) Quelle est la durée de la chute ?

Exercice 12. Le pendule simple

Un point matériel M de masse m est suspendu à une tige rigide de masse supposée négligeable et de longueur ℓ.

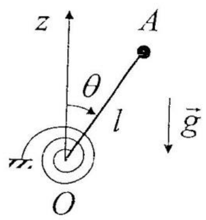


Le point M décrivant une trajectoire circulaire de rayon l, sa vitesse est $v = l\dot{\theta}$ et son énergie mécanique $Em = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta = cte$

Etablir l'équation différentielle du mouvement du pendule simple à l'aide du théorème de la puissance mécanique (sans chercher à la résoudre à ce stade-ci) (ici, équation reliant $\ddot{\theta}$ et θ).

Exercice 13. Equation du mouvement d'un pendule spirale

Une masse ponctuelle m est placée à l'extrémité A d'une tige de masse négligeable, de longueur $l\ = $ OA, articulée en un point fixe O et mobile dans un plan vertical.



Un ressort spiral exerce sur cette tige un moment de rappel $-\,C\,\theta$ où θ désigne l'angle que fait la tige avec la verticale ascendante (Oz) (C est appelée constante de torsion) ; il correspond à cette interaction une énergie potentielle élastique $C\,\frac{\theta^2}{2}$.

On désigne par g l'intensité de la pesanteur. On montre que son énergie mécanique est constante et vaut : $Em = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell\cos\theta + \frac{1}{2}C\theta^2 = cte$

En déduire l'équation du mouvement (équation différentielle reliant $\ddot{\theta}$ et θ).

MK3 – PARTIE 2 – RESOLUTION D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES DU 1ER ORDRE A COEFFICIENTS CONSTANTS

▪ Rappels de cours

1. FORME CANONIQUE DES EQUATIONS DU 1ER ORDRE A COEFFICIENTS CONSTANTS

Equations différentielles du 1er ordre à coefficients constants avec a et b coefficients **constants** et $y(x)$ et $g(x)$ fonctions de x quelconques	$\boldsymbol{a\frac{dy(x)}{dx} + by(x) = g(x)}$

Forme canonique : on ramène à 1 le coefficient du terme de plus haut degré ; Souvent en physique, $x = t$	$\frac{\boldsymbol{dy(t)}}{\boldsymbol{dt}} + \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t})$
constante de temps, ou temps caractéristique Par analyse dimensionnelle, on a bien $[\tau] = T$	$\boldsymbol{\tau} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$
Forme canonique usuelle en mécanique	$\frac{\boldsymbol{dy(t)}}{\boldsymbol{dt}} + \frac{1}{\tau}\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{\tau}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{t})$
Equation homogène avec τ coefficient **constant,** $\tau \in \mathbb{R}$. τ est homogène à un **temps** : **temps caractéristique** du système.	$\frac{\boldsymbol{dy(t)}}{\boldsymbol{dt}} + \frac{1}{\tau}\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = 0$
Solution générale de l'équation homogène Avec A constante d'intégration tq $A \in \mathbb{R}$ et $A \neq 0$.	$\boldsymbol{y_H}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{A}\,\mathbf{exp}\left(-\frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{\tau}}\right)$

Méthode d'obtention de la forme canonique :

- Ramener tous les termes en $y(t)$ et $\frac{\boldsymbol{dy(t)}}{\boldsymbol{dt}}$ à gauche de l'équation, tous les termes sans $y(t)$ à droite.
- Le coefficient devant la dérivée d'ordre 1 $\frac{\boldsymbol{dy(t)}}{\boldsymbol{dt}}$ doit être ramené à 1.
- Par définition, le coefficient devant le terme en $y(t)$ est alors l'inverse du temps caractéristique : $\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}} = \frac{1}{\tau}$

2. METHODE GENERALE DE RESOLUTION (A MAITRISER PARFAITEMENT)

La résolution de ce type d'équations sera a priori menée en ***5 étapes*** :

1) Obtention de la solution générale y_H de l'équation homogène (correspond physiquement au régime *transitoire*, et contient *1 constante d'intégration pour les systèmes du 1^er ordre*).

2) Recherche d'une solution particulière y_P de l'équation complète (correspond physiquement au comportement asymptotique*)*. En pratique, on rencontrera essentiellement un 2nd membre ***constant*** : on recherche alors y_P sous forme de constante qu'on injecte dans l'équation différentielle pour obtenir son expression.

3) Écriture de la solution générale de l'équation complète $y = y_H + y_P$

4) Détermination de la constante d'intégration en utilisant les *conditions initiales* sur *y* ($y(0^+)$), à établir ou fournie dans l'énoncé.

Attention !!! Il est **IMPOSSIBLE** de déterminer les C.I. **avant l'étape 3 !**

5) Vérification de l'homogénéité de l'expression de *X* et de la cohérence avec les prévisions.

SGEH

+

SPEC

=

SGEC

puis

CICI

Une équation différentielle linéaire devra toujours être résolue dans l'ordre 1 à 4 comme ci-dessus.

La condition initiale ne doit pas être utilisée avant la SGEC.

Équation différentielle d'ordre 1 $\Rightarrow$ 1 constante d'intégration $\Rightarrow$ 1 condition initiale.

▪ Exercices

Exercice 14. Freinage par frottement fluide

Une voiture, de masse m, roulant sur une route rectiligne horizontale $(x'x)$ à la vitesse v_0, coupe son moteur à $t = 0$. Elle est soumise à un frottement fluide dont la puissance est $\mathcal{P} = -hv^2$.

Le mouvement étant rectiligne selon l'axe $(x'x)$, la vitesse instantanée à un instant t quelconque est $v = \dot{x}$ soit $Em = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

a) A l'aide du théorème de la puissance mécanique $\frac{dEm}{dt} = \mathcal{P}_{nc} = -hv^2 = -h\dot{x}^2$, établir l'équation différentielle vérifiée par $\dot{x}$ et la mettre sous la forme : $\frac{d\dot{x}}{dt} + \frac{\dot{x}}{\tau} = 0$.

b) En déduire l'expression de la vitesse$v = \dot{x}(t)$ en fonction du temps.

c) En déduire l'équation horaire du mouvement $x(t)$ sachant que $x = 0$ à $t = 0$.

Exercice 15. Chute d'une bille dans l'huile – système du 1er ordre

On étudie la chute d'une bille sphérique en acier, de masse m, dans l'huile, celle-ci étant lâchée, à un instant t_0 pris comme origine des dates, sans vitesse initiale. La bille est repérée par son abscisse z sur un **axe vertical descendant Oz.**

On peut estimer que la puissance des forces de frottement dues à l'huile est de la forme : $P_{nc} = -hv^2$ où v est la vitesse de la bille et h un coefficient positif, fonction du liquide et de la forme de la bille, mais indépendant de la vitesse de la bille.

L'énergie mécanique E_m de la bille à un instant t quelconque est $E_m = Ec + Ep = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz$ avec $\dot{z} = \frac{dz}{dt} = v$, la trajectoire étant rectiligne.

1) Etablir l'équation différentielle liant $\dot{z}$ et z en appliquant le théorème de la puissance mécanique :

$$\frac{dE_m}{dt} = P_{nc} = -hv^2 = -h\dot{z}^2.$$

2) Mettre cette équation différentielle sous sa forme canonique, soit sous une forme de type $\frac{dX}{dt} + \frac{1}{\tau}X = \cdots$ ($second\ membre\ indépendant\ de\ X\ et\ de\ ses\ dérivées$), en introduisant la **constante de temps** (ou **temps caractéristique)** τ du système, puis la résoudre.

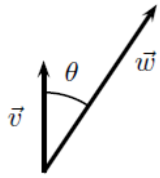
MK5 : LES VECTEURS EN MECANIQUE

▪ Rappels de cours

Un vecteur $\vec{e}$ est défini par la donnée de sa **norme ou module** $\|\vec{e}\| = e$, de sa **direction** et de son **sens.**

1 Produit scalaire

1.1 Définition



Le **produit scalaire** de deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ faisant un angle θ est :

$$\boxed{\vec{v} \cdot \vec{w} = vw\cos\theta}$$

La grandeur obtenue est bien un **scalaire**, et non un vecteur !!!!!

Produit scalaire d'un vecteur avec lui-même : $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{u} = u^2}$
*Produit scalaire d'un vecteur **unitaire** avec lui-même* : $\boxed{\vec{i} \cdot \vec{i} = 1}$

1.2 Propriétés

Le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est nul,
puisque $\cos\theta$ est nul pour $\theta = \pi/2$.

Le produit scalaire est *commutatif* : $\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}}$

Il n'est **pas bijectif** :

$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ **N'IMPLIQUE PAS** $\vec{w} = \vec{u}$!!!!!

2 Base vectorielle

⋆ **BON** (base *orthonormée*) : la base $\mathcal{B}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est *orthonormée* si les trois vecteurs qui la composent sont **unitaires** (norme 1) et **orthogonaux** entre eux, soit

$$\boxed{\|\vec{e}_i\| = 1 \quad \text{et} \quad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 = 0}$$

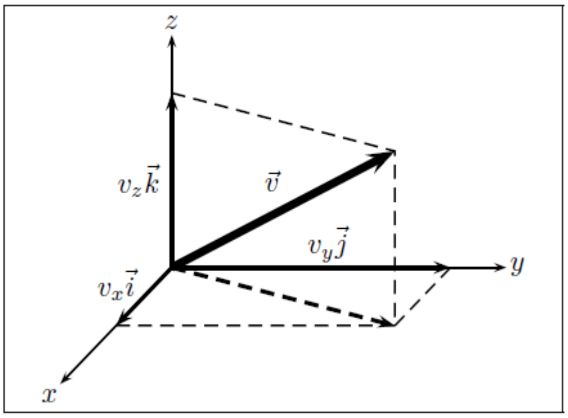
⋆ **BOND** (base *orthonormée directe*) : la base $\mathcal{B}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est *orthonormée* directe si les trois vecteurs forment un **trièdre direct**.
*En pratique, on peut alors appliquer la **règle "des trois doigts"** : les vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ se superposent respectivement avec le pouce, l'index et le majeur de la main droite placés à angle droit.*
*On peut également utiliser la **règle du "tire-bouchon"** : un tire-bouchon vissé le long de $\vec{e}_3$ donne le sens de la rotation de $\pi/2$ permettant passer de $\vec{e}_1$ à $\vec{e}_2$.*

3 Composantes

3.1 Définition

Dans une base orthonormée $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (on prend ici l'exemple de coordonnées cartésiennes, mais les résultats sont analogues pour tout autre repère orthonormé), un vecteur quelconque $\vec{v}$ s'exprime :

$$\boxed{\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}} \qquad \text{ou encore} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$



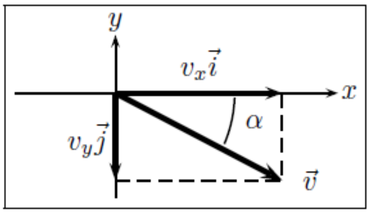
v_x, v_y et v_z sont les **composantes** de $\vec{v}$ sur la base choisie. Ce sont des grandeurs **algébriques** (sur le schéma ci-contre, elles ont été choisies *positives*).

Elles correspondent aux *projections* de $\vec{v}$ sur chaque axe, c'est-à-dire au produit scalaire (cf. **2.**) de $\vec{v}$ avec chaque vecteur de la base :

$$\boxed{v_x = \vec{v}\cdot\vec{i} \quad ; \quad v_y = \vec{v}\cdot\vec{j} \quad ; \quad v_z = \vec{v}\cdot\vec{k}}$$

Sur l'exemple choisi ci-contre (avec α angle non orienté), on peut écrire :

$$v_x = v\cos\alpha \qquad \text{et} \qquad v_y = -v\sin\alpha \qquad (v_y < 0)$$



Remarques et conseils

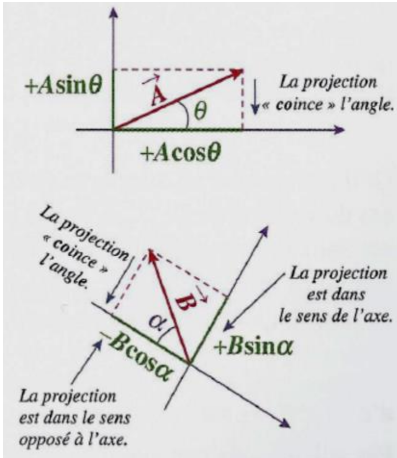
1. Il est **ABSOLUMENT INDISPENSABLE DE PARFAITEMENT SAVOIR PROJETER** des vecteurs avant d'aborder la mécanique : s'y entraîner avant d'aller plus loin !!

2. Il faut bien avoir à l'esprit que tout vecteur peut être représenté là où on veut, de manière à faciliter la projection (un vecteur n'est pas lié à un point de l'espace).

3. Pour la projection sur un vecteur unitaire, on a toujours :

   projection = signe $\times$ norme du vecteur projeté $\times$ sin ou cos (angle);

   le signe se trouve en comparant le sens de la projection avec le sens du vecteur de la base (ou de l'axe), tandis que le choix du sinus ou du cosinus peut se faire à l'aide du moyen mnémotechnique représenté sur le schéma ci-contre : « *si la projection « **co**ince » l'angle utile, il s'agit d'un **co**sinus, **sin**on d'un **sin**us* ». En cas d'hésitation, se ramener systématiquement à la relation : $\vec{u}.\vec{v} = uv.\cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$



4. Il faut être parfaitement rigoureux dans les notations des grandeurs scalaires ou vectorielles ! tout vecteur sera écrit avec une flèche, y compris le vecteur nul $\vec{0}$, et toute grandeur scalaire ne sera jamais écrite avec une flèche. Il est impossible d'avoir une égalité du type «$\overrightarrow{vecteur} = scalaire$ ».

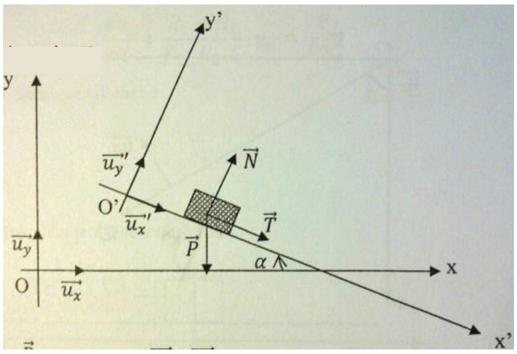
▪ Exercices MK5

Exercice 16. Projection de vecteurs

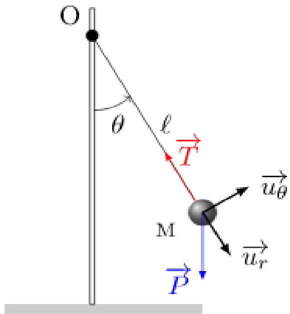
1) Déterminer les composantes des différentes forces représentées dans le schéma ci-contre :

- Dans la base ($\overrightarrow{u_x}'$, $\overrightarrow{u_y}'$)
- Puis dans la base ($\overrightarrow{u_x}$, $\overrightarrow{u_y}$)

2) Quelle sera la base la plus adaptée à l'étude de cet exercice ?



Exercice 17. Pendule

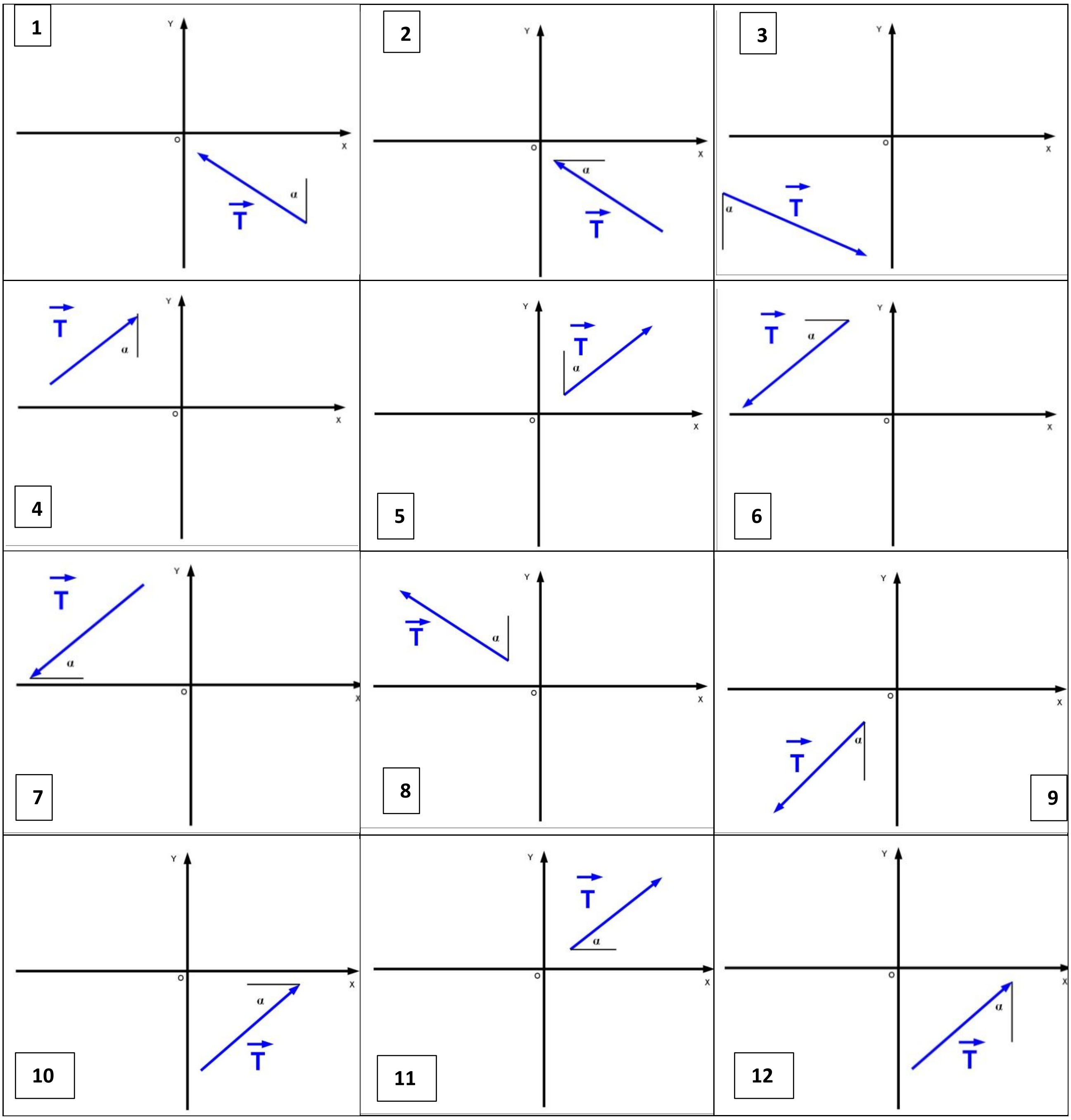


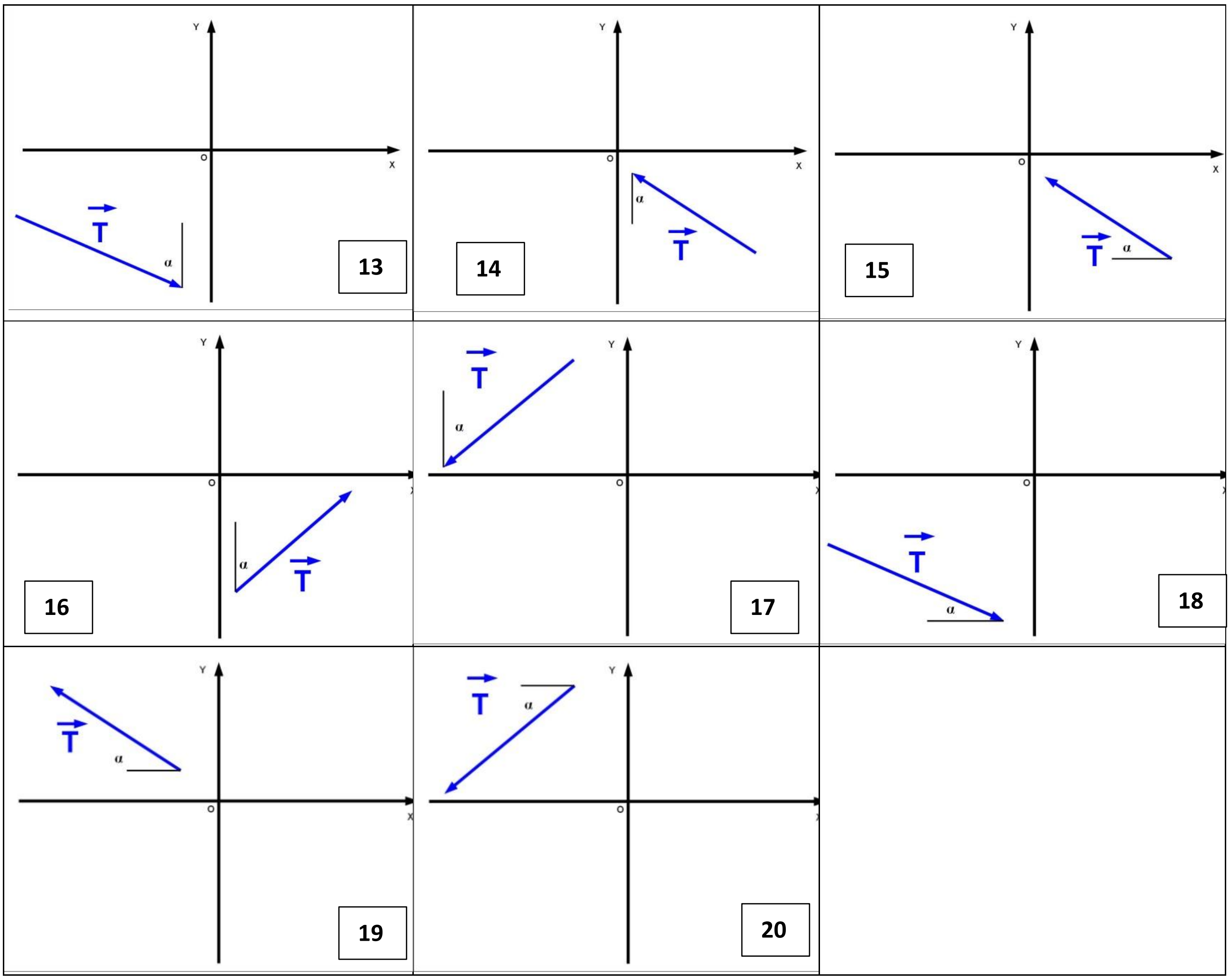
Considérons le pendule ci-contre. Un point matériel M de masse m est suspendu à un fil supposé inextensible de longueur L. On supposera que le fil reste toujours tendu.

Exprimer les composantes des vecteurs poids $\vec{P}$ et tension du fil $\vec{T}$ dans la base $(\overrightarrow{u_r};\ \overrightarrow{u_\theta})$ en fonction de leurs normes respectives notées $\|\vec{P}\| = mg$ et $\|\vec{T}\| = T$.

Exercice 18. Projections

1) Exprimer le vecteur $\vec{T}$ en fonction de $T = \|\vec{T}\|$ et de l'angle α dans la base cartésienne.





MK6 : PHENOMENES DE RESONANCE - LES COMPLEXES EN PHYSIQUE

■ Rappels de cours

1. DEFINITIONS ET NOTATIONS

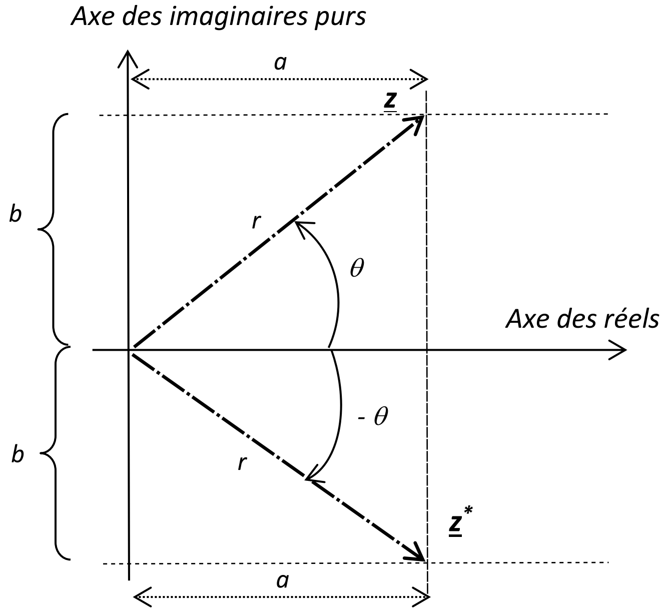
Forme algébrique : $\underline{z} = a + ib$ où $i^2 = -1$ ou $j^2 = -1$; $a = Re(\underline{z})$: partie réelle ; $b = Im(\underline{z})$: partie imaginaire ;

Forme trigonométrique : $\underline{z} = re^{i\theta}$ $e^{i\theta} = cos + i\ sin$; $r = |\underline{z}|$ (ou ou z) : module ; Arg($\underline{z}$) = (ou φ) : argument ;

■ ***Remarques :***

- On choisira la notation la plus adaptée au problème traité.
- La représentation complexe étant souvent employée en électricité où la lettre i est habituellement utilisée pour les intensités, le physicien remplace souvent le nombre complexe i par la notation j.
- On notera $\underline{z}$ (**souligné**) un nombre complexe quelconque, pour le distinguer des grandeurs réelles. Ainsi, si u_R désigne la tension **réelle** aux bornes de la résistance R, $\underline{u_R}$ désigne la tension **complexe** associée.

2. REPRESENTATION GRAPHIQUE



Relations entre les grandeurs $a, b,\ r$ et θ ::

$$a \ = \ r\cos \ ; \ b = \ r\sin \ ;$$
$$|\underline{z}| = \ r \ = \sqrt{a^2 \ + \ b^2};$$
$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$

- ***Remarque :***

Arg($\underline{z}$) = θ = arctan$\left(\frac{b}{a}\right)$ si $a > 0$;

Arg($\underline{z}$) = = arctan$\left(\frac{b}{a}\right)$ + π si $a < 0$

3. RELATIONS UTILES

$$\underline{z_1} = z_2 \ \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \theta_1 = \theta_2 \end{cases}$$

Attention !!! si on oublie qu'une égalité entre nombres complexes correspond à un **système** de **2** équations entre nombres réels, une partie de l'information est perdue et le problème ne peut souvent pas être résolu !!

$$\underline{z} = \frac{\underline{z_1}}{\underline{z_2}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z = \frac{z_1}{z_2} \quad \left(ou \ |\underline{z}| = \frac{|\underline{z_1}|}{|\underline{z_2}|}\right) \\ \theta = \theta_1 - \theta_2 \quad \left(ou \ Arg(\underline{z}) = Arg\left(\underline{z_1}\right) - Arg\left(\underline{z_2}\right)\right) \end{cases}$$

$$\underline{z} = \underline{z_1}.\underline{z_2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z = z_1.z_2 \\ \theta = \theta_1 + \theta_2 \end{cases}$$

Plus généralement :

$$\underline{z} = \underline{z_1}^{\alpha}.\underline{z_2}^{\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z = z_1^{\alpha}.z_2^{\beta} \\ \theta = \alpha\theta_1 + \beta\theta_2 \end{cases}$$

Attention !!! $\underline{z} = \underline{z_1} + \underline{z_2}$ **<u>n'implique pas</u>** que $z = z_1 + z_2$!!

▪ Exercices MK6

Exercice 19. Oscillateur harmonique amorti en régime sinusoïdal forcé

On considère une bille M, quasi ponctuelle, de masse m accrochée à un ressort horizontal de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k, se déplaçant sans frottements solides sur un axe horizontal (Ox). L'autre extrémité du ressort est fixe ; elle est accrochée en un point O constituant l'origine de l'axe horizontal (Ox).

Le point M est de plus soumis à une force excitatrice $\vec{F_e} = F_m\cos(\omega t)\,\vec{e_x}$ de pulsation $\omega = cte$ ainsi qu'à des frottements fluides $\vec{f} = -h\vec{v}$**,** $h = cte$.

A partir de l'équation différentielle, on établit l'expression complexe vérifiée par l'élongation :

$$\left(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q}\, i\omega + \omega_0^2\right) X_m \exp(i\varphi) \;\; = \omega_0^2 X_0$$

Avec X_0 et X_m amplitudes associées à la force excitatrice et au mouvement du ressort, φ phase à l'origine, $\omega_0 = \sqrt{\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{m}}}$ pulsation propre du système et $Q = \frac{1}{h}\sqrt{km}$ facteur de qualité du système.

On peut simplifier cette expression en introduisant une grandeur adimensionnelle proportionnelle à ω, la pulsation réduite $\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{\omega_0}} = \frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{f_0}}$.

1) Etablir l'expression : $X_m \exp(i\varphi) = \underline{X}_M = \frac{X_0}{1-u^2+i\frac{u}{Q}}$

2) En déduire $\boldsymbol{X_M}(\boldsymbol{u}) = \frac{\boldsymbol{X_0}}{\sqrt{(\boldsymbol{1} - \boldsymbol{u}^2)^2 + \left(\frac{u}{Q}\right)^2}}$

3) ** On dit qu'il y a résonance en élongation si la fonction $X_M(u)$ admet un maximum pour une valeur de u non nulle et finie. En posant $\boldsymbol{X_M}(\boldsymbol{u}) = \frac{X_0}{\sqrt{\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})}}$, cette fonction est maximale pour une fréquence réduite u telle que le dénominateur $D(u)$ est minimal. Etablir les caractéristiques de la résonance (Il faut donc chercher la pulsation réduite u telle que $\frac{dD}{du} = 0$ en vérifiant qu'elle est bien associée à un minimum de $D(u)$ ainsi que sa condition d'existence).

4) On définit la vitesse complexe associée au système : $V_M \exp(i\varphi') = i\omega X_m \exp(i\varphi) = i\omega \frac{X_0}{1-u^2+i\frac{u}{Q}}$. Montrer que $V_M \exp(\,i\varphi') = \frac{\omega_0 X_0}{\frac{1}{Q}+i\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$ puis $V_M = \frac{\omega_0 X_0 Q}{\sqrt{1+Q^2\left(u-\frac{1}{u}\right)^2}}$.

Exercice 20. Le bleu du ciel

On peut expliquer la couleur bleue du ciel en étudiant l'excitation des électrons atomiques. Tout se passe comme si les électrons étaient soumis à une force de rappel $\vec{F} = -k\,\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OM}$ étant l'écart par rapport à une position moyenne ; on tient compte du rayonnement émis par ces charges électriques accélérées en introduisant une force supplémentaire équivalente à une force de frottement visqueux de type force de Stockes $\overrightarrow{F_f} = -h\,\vec{v}$; enfin, le champ électromagnétique exerce sur ces particules, de charge $-e$, la force sinusoïdale suivante : $\overrightarrow{F_e} = -e\,\vec{E} = -eE_0\cos(\omega t)\,\overrightarrow{e_x}$.

On cherche alors la position x d'un électron sous la forme : $x(t) = X_m\, cos(\omega t + \varphi)$ à l'aide d'un outil complexe. On lui associe pour cela la grandeur complexe $\underline{x(t)} = X_m e^{i(\omega t+\varphi)}$.

On montre que $-\omega^2\,\underline{x} + \frac{\omega_0}{Q}\, i\omega\,\underline{x} + \omega_0^2\,\underline{x} = \frac{-eE_0}{m}\exp(i\omega t)$ avec

1) Montrer que $X_m e^{i\varphi} = \frac{\boldsymbol{\omega_0^2 X_A}}{\boldsymbol{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\frac{\omega_0}{Q}}}$ en donnant l'expression de X_A en fonction des caractéristiques du système.

2) On a alors pour l'accélération complexe associée :

$$\underline{a}(t) = \underline{\ddot{x}}(t) = -\omega^2 \underline{x}(t) = \frac{-\omega^2\omega_0^2\, X_A}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\dfrac{\omega_0}{Q}}\, e^{i\omega t} = A_m e^{i(\omega t+\varphi a)}$$

En introduisant la pulsation réduite $u = \frac{\omega}{\omega_0}$, montrer que l'amplitude réelle A_m vérifier l'équation : $A_m^2 = K\frac{u^4}{(1-u^2)^2+\left(\frac{u}{Q}\right)^2}$. Donner l'expression de K en fonction des caractéristiques du système.

POUR SE PREPARER A LA PHYSIQUE EN ATS – ELEMENTS DE CORRECTION

CHAPITRE MES.1. : UNITES, CONVERSIONS, PUISSANCES DE 10

Exercice 1. MES1 : Exemples de conversions usuelles

Grandeur	$S = 5.10^{-4}\ \mathrm{m}^2$	$V = 10^{-18}\mathrm{m}^3$	$V' = 20\ L$	$c = 10^2\ \mathrm{mol.m}^3$	$c' = 0{,}02\ \mathrm{mol.L}^{-1}$	$v = 33{,}3\ \mathrm{m.s}^{-1}$
Grandeur	$v' = 72\ \mathrm{km.h}^{-1}$		$\rho = 1{,}02$ kg.m^{-3}		$\rho' = 13{,}6.10^3$ kg.m^{-3}	

Exercice 2. MES1 : Calculer avec des puissances de 10

1) a) $n = \frac{10^5\times12\times6\times3}{8{,}31\times293} = \frac{10^5\times8\times9\times3}{8{,}31\times293} = \frac{8}{8{,}31}\frac{27}{293}.10^5\ \mathrm{mol}$ $\quad n \approx 10^4\ mol$

b) A.N. : $m \approx 10^4 \times 29.10^{-3}$ soit $m \approx 3.10^2\ kg$

c) Nombre N de molécules d'air : $N = nN_A$ A.N. : $N \approx 10^4 \times 6.10^{23} \approx 6.10^{27}$ molécules

2) $|q| = \frac{\rho_{eau}\frac{4}{3}\pi r^3 gd}{E} = \frac{10^3\times\frac{4}{3}\pi\,(5{,}4.10^{-6})^3\times10\times0{,}10}{10^3}$ $\quad |q| \approx 660.10^{-18} = 6{,}6.10^{-16}C$

Exercice 3. MES1 : Application numérique autour de l'énergie cinétique

$E_{c\ voiture} = 386\ kJ$ et $E_{c\ boulon} = 961\ kJ$

Exercice 4. MES1. : Champ gravitationnel de la comète

La masse volumique et la masse de la comète nous donnent le volume : $V_{com} = \frac{m_{com}}{\mu_{com}}$ $\quad or\ V_{com} = \frac{4}{3}\pi\, r_{com}{}^3$

Soit $\frac{4}{3}\pi\, r_{com}{}^3 = \frac{m_{com}}{\mu_{com}}$ $\Rightarrow \boxed{r_{com} = \left(\frac{3}{4\pi}\frac{m_{com}}{\mu_{com}}\right)^{\frac{1}{3}}}$

$$AN:\ r_{com} = \left(\frac{3}{4\pi}\frac{m_{com}}{\mu_{com}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{3}{4\pi}\frac{1{,}0.10^{13}}{400}\right)^{\frac{1}{3}} \approx \left(\frac{3}{12}\frac{1{,}0.10^{13}}{400}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{4}\frac{1{,}0.10^{11}}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{16}.10^{11}\right)^{1/3} \quad \underline{r_{com} \approx 1800\ m}$$

CHAPITRE MK1. VITESSE ET ACCELERATION POUR DES MOUVEMENTS RECTILIGNES – DERIVER ET INTEGRER PAR RAPPORT AU TEMPS

Exercice 5. Vitesse et position (1) : mouvement rectiligne uniforme

- **Position** $x(t)$: $x(t) = \int \dot{x}(t)dt + cte = \int v_0 dt + cte = v_0 t + cte$ C.I. : $x(t=0) \underbrace{=}_{C.I.} x_0 \underbrace{=}_{\substack{expression\\t=0}} cte$

d'où cte = x_0 et $x(t) = v_0 t + x_0$

- **Accélération** $\ddot{x}(t)$: $\ddot{x}(t) = \frac{d\dot{x}}{dt} = 0$

Exercice 6. Vitesse et position (2) : mouvement rectiligne uniformément accéléré

- **Vitesse instantanée :** $v(t) = \int \dot{v}(t)dt + cte = \int a_0 dt + cte = a_0 t + cte$ C.I. : $v(t=0) \underbrace{=}_{C.I.} \boldsymbol{v}_0 \underbrace{=}_{\substack{expression\\t=0}} cte$

  d'où cte = $\boldsymbol{v}_0$ et $v(t) = a_0 t + \boldsymbol{v}_0 = \dot{x}(t)$

- **Position :** $\boldsymbol{x(t)} = \int \dot{x}(t)dt + cte = \int (a_0 t + \boldsymbol{v}_0)dt + cte = ½\, a_0 t^2 + v_0 t + cte$

- C.I. : $x(t=0) \underbrace{=}_{C.I.} \boldsymbol{x}_0 \underbrace{=}_{\substack{expression\\t=0}} cte$ d'où $\boldsymbol{x(t)} = ½\, a_0 t^2 + v_0 t + \boldsymbol{x}_0$

Exercice 7. Un arbre sur la route

1. Le mouvement est rectiligne uniforme pendant la phase de réaction, on a donc : $\dot{x} = V_1$

soit en intégrant la vitesse par rapport au temps entre l'instant $t_a = 0$ où le conducteur voit l'arbre et l'instant t_f où il se met à freiner :

$D_r = x(t_f) - x(t_a) = \int v(t)dt = V_1 t_f$ avec $t_f = \tau_r = 2s$, le conducteur mettant $\tau_r = 2$s à réagir.

$\boxed{\boldsymbol{D_r = V_1 \tau_r}}$ A.N. : $\boldsymbol{D_r} = 44{,}4\ \boldsymbol{m}$

La distance parcourue avant que le conducteur ne commence à freiner est de 44 m.

---

2. La voiture roule à la vitesse V_1 jusqu'à l'instant t_f, puis freine avec une accélération a_2 constante ; on a alors à nouveau un mouvement rectiligne uniformément accéléré, l'accélération et les C.I. ayant changé.

En intégrant une première fois l'accélération par rapport au temps : $v(t) = \int a_2 dt + A = a_2 t + A$ avec A constante d'intégration.

Conditions initiales : on peut choisir comme nouvel instant initial le moment où le conducteur se met à freiner, la voiture roulant alors à la vitesse V_1, soit $v(t=0) = V_1 = A$, soit

$$\boxed{v(t) = \boldsymbol{a}_2 \mathrm{t} + \boldsymbol{V}_1}$$

---

3. On intègre une seconde fois pour trouver la position : $x(t) = \int v(t)dt + B$ avec B constante d'intégration.

Avec $v(t) = a_2 t + V_1$ on a $x(t) = \frac{1}{2} a_2 t^2 + V_1 t + C$, C constante d'intégration

En choisissant comme nouvelle origine des positions la position de la voiture au moment où le conducteur se met à freiner, on a $x(t=0) = 0 = C$, soit $\boxed{\boldsymbol{x(t)} = \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_2 \boldsymbol{t}^2 + \boldsymbol{V}_1 \boldsymbol{t}.}$

---

4. La voiture s'arrête lorsque sa vitesse devient nulle, soit à l'instant t_2 tel que $v(t_2) = a_2 t_2 + V_1 = 0$ ou encore $\boxed{t_2 = -\frac{V_1}{a_2}}$.

---

5. La distance parcourue pendant la phase de freinage est alors :

$$D_f = x(t_2) = \frac{1}{2} a_2 {t_2}^2 + V_1 t_2 = \frac{1}{2} a_2 \left(\frac{V_1}{a_2}\right)^2 - \frac{{V_1}^2}{a_2} \qquad \boxed{D_f = -\frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{V}_1{}^2}{\boldsymbol{a}_2}}$$

La distance totale parcourue est finalement la somme de ces deux distances :

$\boxed{\boldsymbol{D_t} = \boldsymbol{D_f} + \boldsymbol{D_r} = \boldsymbol{V}_1 \boldsymbol{\tau_r} - \frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{V}_1{}^2}{\boldsymbol{a}_2}}$ A.N. : $\boldsymbol{D_t} = 49{,}3\ \boldsymbol{m}$ soit $\boldsymbol{D_t} \approx 94\boldsymbol{m}$ Vérification de l'homogénéité :

$\left[\frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{V}_1{}^2}{\boldsymbol{a}_2}\right] = [V_1]^2.[a_2]^{-1}$ avec $[a_2] = L.T^{-2}$, soit $\left[\frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{V}_1{}^2}{\boldsymbol{a}_2}\right] = (L.T^{-1})^2.L^{-1}.T^2 = L = [D_f]$: homogène

La distance parcourue entre le moment où le conducteur voit l'arbre et le moment où la voiture s'arrête est de 94 m, alors que la distance le séparant de l'arbre lorsqu'il le voit est de 50 m. **Il y a donc choc.**

MK2 : POSITIONS D'EQUILIBRE A PARTIR DE L'ENERGIE POTENTIELLE : DERIVEE PREMIERE NULLE, SIGNE DE LA DERIVEE SECONDE

Exercice 8. Position d'équilibre d'un ressort vertical

Position d'équilibre :

$$\frac{dE_p}{dz} = -mg + \frac{1}{2} \times 2 \times k \times (z - l_0) = -mg + k(z - l_0)$$

$$\left(\frac{dEp}{dz}\right)_{z=z_0} = 0 \Leftrightarrow -mg + k(z_0 - l_0) \Rightarrow \boxed{z_0 = z_{éq} = \frac{mg}{k} + l_0}$$

Vérification 1 : dimension $\frac{MLT^{-2}}{MT^{-2}} = L$, OK   Vérification 2 : sens physique $z_0 > l_0$, OK

Stabilité : $\frac{d^2E_p}{dz^2} = k > 0 \Longrightarrow éq\ stable$

Exercice 9. Energie potentielle du pendule simple

Une position d'équilibre stable correspond à un minimum de l'énergie potentielle.

$E_p = -\,mg\ell\cos\theta$ est minimale si $\cos\theta$ est maximal, donc si $\cos\theta = 1$ donc si $\theta = 0$ (à 2π près)

Une position d'équilibre instable correspond à un maximum de l'énergie potentielle.

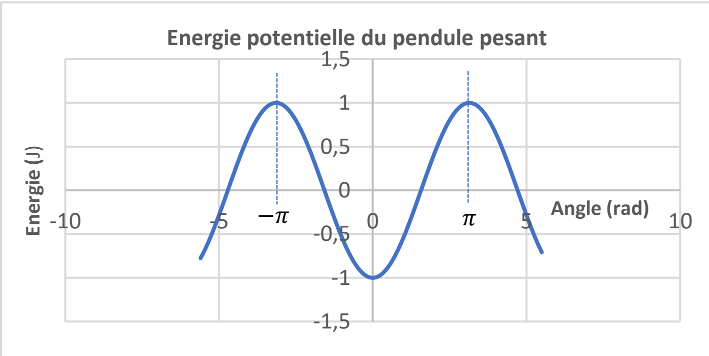
$E_p = -\,mg\ell\cos\theta$ est maximale si $\cos\theta$ est minimal, donc si $\cos\theta = -1$ donc si $\theta = \pi$ (à 2π près)

Vérifier la cohérence physique du résultat obtenu : $\theta_{éq} = 0$ correspond à la position du pendule la plus basse (verticale), ce qui est la solution la plus intuitive ; la solution $\theta_{éq} = \pi$ correspond au pendule vertical, la masse étant dans sa position la plus haute, or le poids étant vertical il ne tire alors pas le système d'un côté ou de l'autre. On s'attend toutefois à une position d'équilibre instable, car si on écarte le système un peu de la position $\theta_{éq} = \pi$, le poids va entrainer le système d'un côté ou de l'autre vers le bas, contrairement à la position $\theta_{éq} = 0$ dans laquelle le poids agit comme une force de rappel.

Conclusion : Équilibre stable en $\boldsymbol{\theta}_{éq,1} = 0\ [2\pi]$

équilibre instable en $\boldsymbol{\theta}_{éq,2} = \pi[2\pi]$.

Graphiquement :



Par un calcul systématique : Il s'agit d'un système conservatif à 1 seul degré de liberté (ici θ) ; les positions d'équilibre sont donc telles que $\left.\frac{dEp}{d\theta}\right|_{\theta_{éq}} = 0$, avec $E_p = -\,mg\ell\cos\theta$, soit $\frac{dEp}{d\theta} = \ mg\ell\sin\theta$.

Finalement, $\left.\frac{dEp}{d\theta}\right|_{\theta_{éq}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad mg\ell\sin\theta_{éq} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin\theta_{éq} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\theta_{éq} = 0[\pi]}$

Stabilité de ces positions d'équilibre : $\frac{d^2Ep}{d\theta^2} = mg\ell\cos\theta$, d'où

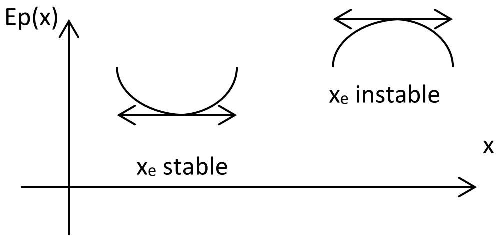
$\left.\frac{d^2Ep}{d\theta^2}\right|_{\theta_{éq,1}=0} = mg\ell > 0$: $\boldsymbol{\theta}_{éq,1} = 0$ équilibre **stable**

$\left.\frac{d^2Ep}{d\theta^2}\right|_{\theta_{éq,2}=\pi} = -mg\ell < 0$: $\boldsymbol{\theta}_{éq,2} = \pi$ équilibre **instable**

Exercice 10. Equilibre le long d'une tige –exemple de bifurcation mécanique (oscillateur de Landau)

Point d'équilibre stable : $\left.\frac{dEp}{dx}\right|_{x=x_{eq}} = 0$ et $\left.\frac{d^2Ep}{dx^2}\right|_{x=x_{eq}} > 0.$

Point d'équilibre instable : $\left.\frac{dEp}{dx}\right|_{x=x_{eq}} = 0$ et $\left.\frac{d^2Ep}{dx^2}\right|_{x=x_{eq}} < 0.$



$\frac{dEp}{dx} = kx\left(1 - \frac{L_0}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)$ et

Donc $\frac{dEp}{dx} = 0$ pour $x = 0$ et $x = \pm\sqrt{L_0^2 - a^2}$ si ***a < L₀***

$\frac{dEp}{dx} = 0$ pour $x = 0$ uniquement si ***a > L₀***

De plus, $\left.\frac{d^2Ep}{dx^2}\right|_{x=\sqrt{L_0^2-a^2}} = k\left(1 - \frac{a^2}{L_0^2}\right) > 0$ si $a < L_0$ et $\left.\frac{d^2Ep}{dx^2}\right|_{x=0} = k\left(1 - \frac{L_0}{a}\right) > 0$ 0 si $a > L_0$ et < 0 si $a < L_0$

Si $a < L_0,\ x = 0$ est position d'équilibre instable et $x = \pm\sqrt{L_0^2 - a^2}$ sont deux positions d'équilibre stables.

Si $a > L_0,\ x = 0$ est position d'équilibre stable

MK3 PARTIE 1 : CONSERVATION DE L'ENERGIE MECANIQUE – EQUATION DIFFERENTIELLE DU MOUVEMENT : DERIVEE DE FONCTIONS COMPOSEES

Exercice 11. Chute d'une pomme de pin

1) **Théorème de la puissance mécanique** : $\frac{dE_m}{dt} = 0 = m\dot{z}\ddot{z} + mg\dot{z}$

$\dot{z} \neq 0$ si on étudie le mouvement de la pomme de pin.

D'où l'équation différentielle : $\ddot{z} + g = 0$

Accélération de la pomme de pin : $\boldsymbol{\ddot{z} = -g}$

La pomme de pin est animée d'un mouvement rectiligne uniformément varié (ou uniformément accéléré).

2) On intègre par rapport au temps pour obtenir la vitesse $\dot{z}$:

$$\frac{d\dot{z}}{dt} = \ddot{z} = -g \quad \Longrightarrow \quad \dot{z} = -gt + cte$$

C.I. : La vitesse initiale de la pomme de pin est nulle : $\dot{z}(t = 0) = 0 = cte$

d'où **Vitesse de la pomme de pin :** $\boxed{\boldsymbol{\dot{z} = -gt}}$

On réintègre par rapport au temps pour obtenir la position (l'altitude) de la pomme de pin

$$\frac{dz}{dt} = \dot{z} = -gt \quad \Longrightarrow \quad z = -½\, gt^2 + cte$$

C.I. : l'altitude initiale de la pomme de pin est h : $z(t = 0) = h$ = cte

d'où **Altitude de la pomme de pin :** $\boxed{\boldsymbol{z = -½\, gt^2 + h}}$

c. La pomme de pin touche le sol quand $z = 0$

La date t_{sol} correspondante vérifie $z(t_{sol}) = 0 = -½\, gt_{sol}^2 + h = 0$, soit $½\, gt_{sol}^2 = h$, et $t_{sol} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

On évite de noter simplement t cette date particulière, la notation étant réservée à un instant t quelconque.
On peut noter Δt l'intervalle de temps de chute, avec $\Delta t = t_{sol} - 0$.

Durée de la chute : $\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Accélération de la pesanteur : $g \approx 10\, m.s^{-2}$; $h = 10\, m$; **A.N. :** $\Delta t \approx 1{,}4\, s$

Exercice 12. Le pendule simple *(différents Oraux ATS)*

On a d'après le TPM, le système étant conservatif : $\frac{dEm}{dt} = 0 = m\ell^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\dot{\theta}\sin\theta$

Attention au calcul de la dérivée !!! il s'agit d'une dérivée par rapport au temps, avec $f(t) = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 = f(\theta(t))$, soit la dérivée d'une fonction composée.

On a alors $f'(t) = \frac{df}{dt} = \frac{df}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\frac{df}{d\theta}$

$$m\ell^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\dot{\theta}\sin\theta = 0 \iff \begin{cases} \dot{\theta} = 0 \\ \ell^2\ddot{\theta} + gl\sin\theta = 0 \end{cases}$$

La solution $\dot{\theta} = 0$ correspond à une vitesse toujours nulle (système arrêté) : sans intérêt pour l'étude du mouvement.

L'équation différentielle du mouvement est donc : $\ell^2\ddot{\theta} + gl\sin\theta = 0 \iff \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$

Exercice 13. Equation du mouvement d'un pendule spirale

Théorème de la puissance mécanique (TPM) appliqué au système dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$\frac{dEm}{dt} = 0$ en l'absence de toute force non conservative.

Attention ! dérivée d'une fonction composée !!

$$\frac{dEm}{dt} = 0 = m\ell^2\dot{\theta}\ddot{\theta} - \dot{\theta}mg\ell\sin\theta + \dot{\theta}\,C\theta \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{\theta} = 0 \\ m\ell^2\ddot{\theta} - mgl\sin\theta + C\theta = 0 \end{cases}$$

La solution $\dot{\theta} = 0$ n'est pas physiquement intéressante pour l'étude du mouvement, équation différentielle du mouvement :

$$\boxed{\boldsymbol{\ddot{\theta} - \frac{g}{\ell}\sin\theta + \frac{C}{m\ell^2}\theta} = 0}$$

MK3 – PARTIE 2 – RESOLUTION D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES DU 1ER ORDRE A COEFFICIENTS CONSTANTS

Exercice 14. Freinage par frottement fluide

Théorème de la puissance mécanique au système dans le référentiel galiléen : $\frac{dEm}{dt} = \mathcal{P}_{nc} = -hv^2 = -h\dot{x}^2 = m\dot{x}\ddot{x}$.

Attention ! dérivée d'une fonction composée !

Soit $-h\dot{x} = m\ddot{x}$, la solution $\dot{x} = 0$ n'étant pas physiquement intéressante. Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants, sans second membre (équation homogène).

sous forme canonique : $\frac{d\dot{x}}{dt} + \frac{h}{m}\dot{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\dot{x}}{dt} + \frac{\dot{x}}{\tau} = 0$

Avec $\boldsymbol{\tau = \frac{m}{h}}$ **temps caractéristique** du système.

Toujours mettre les équations différentielles obtenues sous forme canonique ! *Le temps caractéristique donne l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire, et non sa durée exacte.*

SGEH : $= \dot{x}(t)$ avec A constante d'intégration (pas de SPEC en l'absence de second membre).
CICI : $\dot{x}(t=0) = v_0 = A$

Finalement, $\boxed{\boldsymbol{\dot{x}(t) = v_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}}$ avec $\boldsymbol{\tau = \frac{m}{h}}$ **temps caractéristique** du système.

3) Equation horaire du mouvement : on cherche $x(t)$, obtenu en intégrant $\dot{x}(t)$ par rapport au temps entre l'instant $t = 0$ et un instant t quelconque.

$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$ soit $x(t) - x(t=0) = \int_{t=0}^{t} v_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) dt = \left[-\tau v_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]_{t=0}^{t} = \tau v_0\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$

De plus, C.I. : $x = 0$ à $t = 0$, soit

$$x(t) = \tau v_0\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

On pouvait également rechercher une primitive écrite à une constante près, ensuite déterminée à l'aide de la condition initiale.

Exercice 15. Chute d'une bille dans l'huile – système du 1er ordre

2) Théorème de la puissance mécanique : $\frac{dE_m}{dt} = P_{nc} = -hv^2 = -h\dot{z}^2$.

Or $\frac{dE_m}{dt} = m\dot{z}\ddot{z} - mg\dot{z} = -h\dot{z}^2$

On a donc $m\dot{z}\ddot{z} - mg\dot{z} = -h\dot{z}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{z} = 0 \\ m\ddot{z} + h\dot{z} = mg \end{cases}$

$\dot{z} = 0$ correspond à l'immobilité de la bille, or o**n s'intéresse au mouvement de la bille, donc** $\dot{z} \neq 0$ (solution physiquement sans intérêt pour notre étude).

On obtient donc une équation différentielle linéaire d'ordre 1, à coefficients constants, liant $\dot{z}$ et t :

$$\boldsymbol{m\ddot{z} + h\dot{z} = mg} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{m\frac{d\dot{z}}{dt} + h\dot{z} = mg}$$

3) Mise sous forme canonique : On commence par ramener à 1 le coefficient du terme de plus haut degré (en divisant par m, ici) : $\boldsymbol{\frac{d\dot{z}}{dt} + \frac{h}{m}\dot{z} = g}$

Dimension du coefficient $\frac{h}{m}$ placé devant $\dot{z}$ **:** $\left[\frac{d\dot{z}}{dt}\right] = \left[\frac{h}{m}\dot{z}\right] \quad \Leftrightarrow \quad \frac{[\dot{z}]}{T} = \left[\frac{h}{m}\right][\dot{z}]$ d'où $\left[\frac{h}{m}\right] = T^{-1}$

On définit une constante de temps, ou un temps caractéristique : $\tau = \frac{m}{h}$

L'équation différentielle se met donc sous la forme : $\frac{d\dot{z}}{dt} + \frac{1}{\tau}\,\dot{z} = g$ qui correspond à la forme canonique des équations différentielles du 1^er ordre à coefficients constants.

4) Résolution de l'équation différentielle :

Méthode et calculs à maitriser parfaitement

Résolution de l'équation sans second membre (ESSM) ou équation **homogène** (EH) : $\frac{d\dot{z}}{dt} + \frac{1}{\tau}\dot{z} = 0$

Solution générale de l'équation homogène (SGEH) : $\boldsymbol{\dot{z}_H} = A\ \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$, A étant une constante quelconque, de même dimension que $\dot{z}$ (soit une vitesse).

Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre, ou équation complète (SPEC) : $\frac{d\dot{z}}{dt} + \frac{1}{\tau}\dot{z} = g$

Le second membre étant constant, on cherche une solution particulière constante pour la vitesse $\dot{z}$; on a alors $\frac{d\dot{z}}{dt} = 0$, soit $\dot{z}_P = \tau g$

On en déduit la **solution générale de l'équation complète** (SGEC) : $\dot{z} = \dot{z}_H + \dot{z}_P = A\ \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \tau g$

On termine en déterminant la **constante d'intégration** A à l'aide d'une condition initiale (CICI).

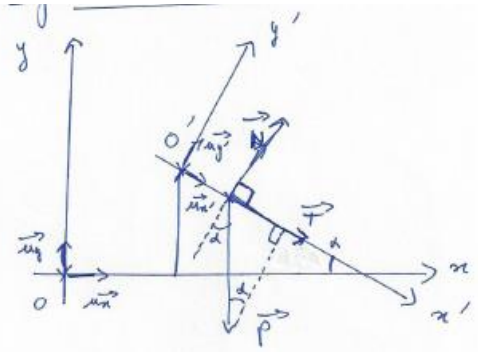
$\dot{z}(t=0) = 0$, d'où $\quad A\ exp\left(-\frac{0}{\tau}\right) + g\tau = 0$; $\qquad$ Soit $A = -\,\tau g$

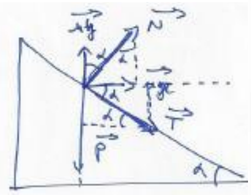
Finalement, vitesse de la bille : $\dot{z}(t) = \ g\tau\left(1 - \ \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$

Attention !
L'ordre des différentes étapes lors de la résolution de l'équation différentielle est important. Ici, les deux premières étapes sont interchangeables. Mais en général, elles ne le sont pas. Ainsi, une équation différentielle linéaire devra toujours être résolue dans l'ordre 1 à 4 comme ci-dessus.
La condition initiale ne doit pas être utilisée avant la fin.

Équation différentielle d'ordre 1 $\Rightarrow$ 1 constante d'intégration $\Rightarrow$ 1 condition initiale, exploitée sur la SGEC.

Exercice 16. Projection de vecteurs





1) Dans la base $(O', \vec{u_{x'}}, \vec{u_{y'}})$: $\vec{T} = T\,\vec{u_{x'}} = \begin{vmatrix} T \\ 0 \end{vmatrix}$

$\vec{N} = N\,\vec{u_{y'}} = \begin{vmatrix} 0 \\ N \end{vmatrix}$

$\vec{P} = P\sin\alpha\,\vec{u_{x'}} - P\cos\alpha\,\vec{u_{y'}} = \begin{vmatrix} P\sin\alpha \\ -P\cos\alpha \end{vmatrix}$

2) Dans la base $(O, \vec{u_x}, \vec{u_y})$:

Exercice 17. Pendule

Poids, vertical descendant : $\vec{P} = m\,\vec{g} = mg\cos\theta\,\vec{u_r} - mg\sin\theta\,\vec{u_\theta}$

Tension du fil dirigée selon le fil vers O: $\vec{T} = -T\,\vec{u_r}$

Exercice 18. Je projette, tu projettes, il (elle) projette….

Dans la base cartésienne $\mathcal{B}\begin{pmatrix}\vec{u_x}\\ \vec{u_y}\end{pmatrix}$:

1) $\vec{T} = \begin{pmatrix}-T\sin\alpha\\ T\cos\alpha\end{pmatrix}$ 2) $\vec{T} = \begin{pmatrix}-T\cos\alpha\\ T\sin\alpha\end{pmatrix}$ 3) $\vec{T} = \begin{pmatrix}T\sin\alpha\\ -T\cos\alpha\end{pmatrix}$

4) $\vec{T} = \begin{pmatrix}T\sin\alpha\\ T\cos\alpha\end{pmatrix}$ 5) $\vec{T} = \begin{pmatrix}T\sin\alpha\\ T\cos\alpha\end{pmatrix}$ 6) $\vec{T} = \begin{pmatrix}-T\cos\alpha\\ -T\sin\alpha\end{pmatrix}$

7) $\vec{T} = \begin{pmatrix}-T\cos\alpha\\ -T\sin\alpha\end{pmatrix}$ 8) $\vec{T} = \begin{pmatrix}-T\sin\alpha\\ T\cos\alpha\end{pmatrix}$ 9) $\vec{T} = \begin{pmatrix}-T\sin\alpha\\ -T\cos\alpha\end{pmatrix}$

10) $\vec{T} = \begin{pmatrix}T\cos\alpha\\ T\sin\alpha\end{pmatrix}$ 11) $\vec{T} = \begin{pmatrix}T\cos\alpha\\ T\sin\alpha\end{pmatrix}$ 12) $\vec{T} = \begin{pmatrix}T\sin\alpha\\ T\cos\alpha\end{pmatrix}$

13) $\vec{T} = \begin{pmatrix}T\,\mathrm{sins}\,\alpha\\ -T\cos\alpha\end{pmatrix}$ 14) $\vec{T} = \begin{pmatrix}-T\sin\alpha\\ T\cos\alpha\end{pmatrix}$ 15) $\vec{T} = \begin{pmatrix}-T\cos\alpha\\ T\sin\alpha\end{pmatrix}$

16) $\vec{T} = \begin{pmatrix}T\sin\alpha\\ T\cos\alpha\end{pmatrix}$ 17) $\vec{T} = \begin{pmatrix}-T\sin\alpha\\ -T\cos\alpha\end{pmatrix}$ 18) $\vec{T} = \begin{pmatrix}T\cos\alpha\\ -T\sin\alpha\end{pmatrix}$

19) $\vec{T} = \begin{pmatrix}-T\cos\alpha\\ T\sin\alpha\end{pmatrix}$ 20) $\vec{T} = \begin{pmatrix}-T\cos\alpha\\ -T\sin\alpha\end{pmatrix}$

Exercice 19. Oscillateur harmonique amorti en régime sinusoïdal forcé

5) On a $\left(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q}\, i\omega + \omega_0^2\right) X_m \exp(i\varphi) = \omega_0^2\, X_0$

Soit en isolant l'amplitude complexe de l'élongation :

$$\boxed{X_m \exp(i\varphi) = \underline{X_M} = \frac{\omega_0^2\, X_0}{\left(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q}\, i\omega + \omega_0^2\right)}}$$

En introduisat $u = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}$ soit $\omega = u\,\omega_0$, on en déduit $X_m \exp(i\varphi) = \underline{X_M} = \frac{\omega_0^2\, X_0}{\left(-u^2\omega_0^2 + i\omega_0^2\frac{u}{Q} + \omega_0^2\right)}$

$$\boxed{X_m \exp(i\varphi) = \underline{X_M} = \frac{X_0}{1 - u^2 + i\,\frac{u}{Q}}}$$

6) Amplitude réelle du mouvement oscillant forcé :

$$X_M = \left|\underline{X_M}\right| = \left|X_m \exp(i\varphi)\right| = \left|\frac{X_0}{1 - u^2 + i\,\frac{u}{Q}}\right| = \frac{X_0}{\left|1 - u^2 + i\,\frac{u}{Q}\right|}$$

On obtient : $\boxed{\boldsymbol{X_M(u)} = \frac{X_0}{\sqrt{(1 - \boldsymbol{u}^2)^2 + \left(\frac{u}{Q}\right)^2}}}$

7) On s'intéresse aux variations de X_M avec u. Le numérateur de X_M est une constante positive, on peut donc simplifier l'étude en étudiant le dénominateur de X_M, et même le carré de celui-ci.

On définit $D(u) = (1 - u^2)^2 + \left(\frac{u}{Q}\right)^2$ de sorte que $\boldsymbol{X_M(u)} = \frac{X_0}{\sqrt{\boldsymbol{D(u)}}}$

L'amplitude est alors maximale pour une fréquence telle que le dénominateur $D(u)$ est minimal.

Il faut donc chercher la pulsation réduite u telle que $\frac{dD}{du} = 0$

$$\frac{dD}{du} = 2 \times (-2u) \times (1 - u^2) + \frac{2}{Q}\,\frac{u}{Q} = 4u\left(u^2 - 1 + \frac{1}{2Q^2}\right)$$

$$\frac{dD}{du} = 4\,u\left(u^2 - \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)\right) = 0$$

$\frac{dD}{du}$ s'annule en $u = 0$ et, **éventuellement**, selon le signe de $1 - \frac{1}{2Q^2}$, en $u = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$:

$$1 - \frac{1}{2Q^2} < 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2Q^2} < 0 \Leftrightarrow 1 < \frac{1}{2Q^2} \Leftrightarrow 2Q^2 < 1 \Leftrightarrow Q^2 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boldsymbol{Q} < \frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{\boldsymbol{2}}}$$

$$1 - \frac{1}{2Q^2} > 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2Q^2} > 0 \Leftrightarrow 1 > \frac{1}{2Q^2} \Leftrightarrow 2Q^2 > 1 \Leftrightarrow Q^2 > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boldsymbol{Q} > \frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{\boldsymbol{2}}}$$

- **Premier cas :** $\boldsymbol{Q} < \frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{\boldsymbol{2}}}$

u	0		$+\infty$
$\frac{dD}{du}$	0	> 0	
$D(u)$	1	$\nearrow$	$+\infty$
$X_M(u)$	X_0	$\searrow$	0^+

$X_M(u)$ décroît si la pulsation augmente, **pas de phénomène de résonance**.

■ **Second cas :** $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

u	0		$\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}$		$+\infty$
$\frac{dD}{du}$	0	<0	0	>0	
$D(u)$	1	↘	$\frac{1}{Q^2}\left(1-\frac{1}{4Q^2}\right)$	↗	$+\infty$
$X_M(u)$	X_0	↗	$\frac{Q\,X_0}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$	↘	0^+

Il y a **résonance en élongation**

en $\boldsymbol{u = \sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}}$,

soit **en** $\boldsymbol{\omega_r = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}}$

■ **Premières caractéristiques de la résonance en élongation**

- La **résonance en élongation** est **soumise à condition** : elle n'existe que pour les facteurs de qualité suffisamment élevés, soit pour $\boldsymbol{Q > \frac{1}{\sqrt{2}}}$ **;**
- Pour $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, la pulsation de résonance est $\boldsymbol{\omega_r = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}}$ **;**
- La pulsation de résonance est toujours inférieure à la pulsation propre de l'oscillateur **:** $\boldsymbol{\omega_r < \omega_0}$
- Pour les facteurs de qualité suffisamment élevés ($Q > 5$ à 10), $\boldsymbol{\omega_r \approx \omega_0}$

8) En introduisant la pulsation réduite avec $\omega = u\omega_0$ et en exploitant $-u^2 = (iu)^2$ ainsi que $\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$:

$$\underline{V_M} = V_M\exp(i\varphi') = i\omega X_m\exp(i\varphi) = i\omega\frac{X_0}{1-u^2+i\frac{u}{Q}} = iu\omega_0\frac{X_0}{1-u^2+i\frac{u}{Q}} = \frac{\omega_0}{\frac{1}{iu}}\frac{X_0}{1-u^2+i\frac{u}{Q}} = \frac{\omega_0X_0}{\frac{1}{iu}+iu+\frac{1}{Q}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\underline{V_M}(u) = V_M\exp(\,i\varphi') = \frac{\omega_0X_0}{\frac{1}{Q}+i\left(u-\frac{1}{u}\right)} = \frac{\omega_0X_0Q}{1+iQ\left(u-\frac{1}{u}\right)}}}$$

Soit, en fonction de ω :

$$\boxed{\boldsymbol{\underline{V_M}(\omega) = V_M\exp(\,i\varphi') = \frac{\omega_0X_0}{\frac{1}{Q}+i\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)}}}$$

- **Etude de la résonance en vitesse**

$$V_M = \left|\underline{V_M}(u)\right| = \left|V_M\exp(\,i\varphi')\right| = \left|\frac{\omega_0X_0Q}{1+iQ\left(u-\frac{1}{u}\right)}\right| = \frac{\omega_0X_0Q}{\sqrt{1+Q^2\left(u-\frac{1}{u}\right)^2}}$$

V_M maximale pour $1+Q^2\left(u-\frac{1}{u}\right)^2$ minimale : solution évidente : $u = 1$ soit $\omega = \omega_0$

Exercice 20. Le bleu du ciel

9) On commence par isoler $\underline{x}$:

$$-\omega^2\,\underline{x} + \frac{\omega_0}{Q}\,i\omega\,\underline{x} + \omega_0^2\,\underline{x} = \frac{-eE_0}{m}\exp(i\omega t)$$

$$\left(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q}\,i\omega + \omega_0^2\right)\,\underline{x} = \frac{-eE_0}{m}\exp(i\omega t)$$

$$\underline{x}(t) = X_m e^{i(\omega t+\varphi)} = \frac{\frac{-eE_0}{m}}{-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q}\, i\omega + \omega_0^2}\exp(i\omega t) = \frac{\omega_0^2 X_A}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\frac{\omega_0}{Q}}\ e^{i\omega t}$$

avec par identification $\omega_0^2 X_A = \frac{-eE_0}{m} \qquad \Rightarrow \qquad X_A = \frac{-eE_0}{k}$

10) Amplitude de l'accélération : calcul du module

$$A_m = \left|\underline{a}(t)\right| = \left|\frac{-\omega^2\omega_0^2\, X_A}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\frac{\omega_0}{Q}}\, e^{i\omega t}\right| = \left|\frac{-\omega^2\omega_0^2\, X_A}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\frac{\omega_0}{Q}}\right| = \frac{\omega^2\omega_0^2\, X_A}{\left|\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\frac{\omega_0}{Q}\right|}$$

d'où

$$A_m^2 = \frac{(\omega^2\omega_0^2\, X_A)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\omega\frac{\omega_0}{Q}\right)^2} = \frac{(\omega^2\, X_A)^2}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0 Q}\right)^2}$$

soit avec $\boldsymbol{u} = \frac{\omega}{\omega_0}$ $\quad \boldsymbol{A_m^2 = K\frac{u^4}{(1-u^2)^2 + \left(\frac{u}{Q}\right)^2}}$ $\quad$ avec $\boldsymbol{K = \left(\omega_0^2 X_A\right)^2 = \left(\frac{eE_0}{m}\right)^2}$